

Όνομα μαθήματος: Τυπική θεμελίωση μαθηματικών και βοηθοί αποδείξεων

Ωρες: 4

Διδάσκων: (Για το Εαρινό εξάμηνο του Α.Ε, 2025-2026) Θάνος Τσουάνας, Επίκουρος Καθηγητής του Instituto Metrópole Digital, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, Βραζιλία.

<https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/docente/portal.jsf?siape=2278403>

<https://tsouanas.org/>

Στόχοι μαθήματος

Ο στόχος του μαθήματος είναι ο/η φοιτητής/τρια που θα έχει παρακολουθήσει το μάθημα να

1. γνωρίζει τις στοιχειώδεις έννοιες της Θεωρίας Τύπων και της Θεωρίας Αποδείξεων.
2. μπορεί να χρησιμοποιήσει εργαλεία από τη Θεωρία Κατηγοριών και τη Θεωρία Διάταξης για την κατανόηση της έννοιας της απόδειξης και την δομική οργάνωση των μαθηματικών.
3. κατανοεί την έννοια της μαθηματικής απόδειξης ως κατασκευαστική/υπολογιστική διαδικασία (πρόγραμμα).
4. έχει την Ικανότητα τυποποίησης μαθηματικών με χρήση βοηθού αποδείξεων (π.χ., **Lean**, **Agda**, **Rocq**).
5. να κατανοεί την διαφοροποίηση “δυσκών” εννοιών όπως Σύνταξη/Σημασιολογία, Δυναμικοί/Στατικοί τύποι, Εντατικότητα/Εκτατικότητα, Προδιαγραφή/Υλοποίηση, Ανοδική/Καθοδική διαδικασία, Γλώσσα/Μεταγλώσσα, Πρόταση/Κρίση, Τύπος/Σύνολο

Ύλη μαθήματος

1. Η έννοια του ορισμού. Η έννοια της απόδειξης. Παραδείγματα ορισμών και αποδείξεων από πεδία όπως Ανάλυση, Άλγεβρα.
2. Η έννοιες της δομικής αναδρομής/επαγωγής. Η χρήση της ως τεχνική ορισμού/απόδειξης στα μαθηματικά.
3. Στοιχεία λ-λογισμού: ανώνυμες συναρτήσεις και συναρτήσεις υψηλής τάξης. Η έννοια του τύπου. Κανόνες συμπερασμού για συστήματα τύπων και αποδείξεων.
4. Οι έννοιες της μαθηματικής προδιαγραφής και υλοποίησης. Μαθηματικές δομές: σύνολα, πλειάδες, πλέγματα, μονοειδή, πηλικά, γινόμενα, και χώροι συναρτήσεων.
5. Στοιχεία Θεωρίας Διάταξης και Κατηγοριών: αντικείμενα και κατασκευές καθορισμένες από καθολικές ιδιότητες, ιδιότητες μορφισμών, μεταθετικά διαγράμματα. Μερικώς διατεταγμένα σύνολα και πλέγματα. Η έννοια της δυσκότητας.
6. Θεωρία τύπων Martin-Löf: στοιχεία θεωρίας αποδείξεων, εξαρτημένοι τύποι, οικογένειες τύπων, τύποι Σ και Π . Κατασκευαστικά μαθηματικά.
7. Εισαγωγή στις γλώσσες προγραμματισμού εξαρτημένων τύπων. Βοηθοί αποδείξεων (π.χ., **Lean**, **Agda**, **Rocq**). Τυποποίηση συγκεκριμένων μαθηματικών θεωριών.

Τρόπος εξέτασης

Συμμετοχή / Γραπτές εξετάσεις / Σετ ασκήσεων

Σύγγραμμα

Σημειώσεις του διδάσκοντα
<https://tsouanas.org/teaching/>

Βιβλιογραφία

Θεωρία Τύπων και Θεωρία Αποδείξεων

Girard (1989): Proofs and types [PT]
The Univalent Foundations Program (2013): Homotopy Type Theory [HoTT]
Rijke (2022): Introduction to Homotopy Type Theory
Nordström et al (1990): Programming in Martin-Löf Type Theory
Martin-Löf (1975): An Intuitionistic Theory of Types: Predicative Part
Martin-Löf (1982): Constructive mathematics and computer programming
Martin-Löf (1984): Intuitionistic Type Theory
An intuitionistic theory of types, in G. Sambin, J. M. Smith (Eds.): Twenty-five years of constructive type theory, Oxford University Press, 1998, pp. 127-172.

Lean, Agda, Rocq:

Lean: <https://lean-lang.org/>
Agda: <https://agda.readthedocs.io/>
Rocq: <https://rocq-prover.org/>

Christiansen (2023): Functional Programming in Lean
Avigad, de Moura, et al: Theorem Proving in Lean 4
Avigad, Massot: Mathematics in Lean
Tao (2025): Lean formalization of Analysis I - <https://teorth.github.io/analysis/>
Escardó (2019): Introduction to Univalent Foundations of Mathematics with Agda
Wadler, Kokke, Siek (2022): Programming Language Foundations in Agda
Pierce, Azevedo de Amorim, Casinghino (2016): Software Foundations, Vol 1: Logical foundations

Κατασκευαστικά Μαθηματικά

Bishop (1967): Foundations of constructive analysis
Bishop, Bridges (1985): Constructive Analysis, Springer-Verlag.
Bridges, Richman (1987): Varieties of Constructive Mathematics, Cambridge University Press.
Mines, Richman, Ruitenburg (1988): A course in constructive algebra, Springer.
Bridges, Vita (2006): Techniques of Constructive Analysis, Springer.
Handbook of Constructive Mathematics (2023), Bridges, Ishihara, Rathjen, Schwichtenberg (Eds.), Cambridge, University Press.
Veldman (2021): Intuitionism: an inspiration?
Bauer (2017): Five stages of accepting constructive mathematics

Θεωρία Κατηγοριών και Διάταξης

Awodey (2010): Category Theory (2nd ed.)
Goldblatt (1979): Topoi
Crole (1993): Categories for Types

Davey & Priestley : Introduction to Lattices and Order
Grätzer (1971): Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices (Dover)
Riehl (2016): Category Theory in Context
Barr & Wells (1998): Category Theory for Computing Science, 2nd ed., 2020 reprint
Leinster (2014): Basic Category Theory
Lawvere (1963): Functorial Semantics of Algebraic Theories

Βοηθητικά

Wells (1993): Communicating Mathematics: Useful ideas from computer science (in American Mathematical Monthly, Vol 120, No. 5, pp.397–408)
Hindley (1986): Introduction to combinators and lambda-calculus
Leinster (2012): Rethinking set theory
Harper (2016): Practical Foundations for Programming Languages
Bird & Wadler (1986): Introduction to Functional Programming
Vickers (1989): Topology via Logic
Mendelson (1973): Number Systems and the Foundations of Analysis
Aluffi (2009): Algebra, Chapter 0
Moschovakis (2005): Notes on Set Theory, 2nd ed.