# M

*Escolha até **duas**.*

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{\phantom{xxxxxx}}^{\pi \text{ continuous}}$$

$$\textbf{M2} \Downarrow \quad \Uparrow \textbf{M3}$$

$$\overbrace{(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\,\pi\ f\ b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \ \&\ \ \pi\ f_0\ b = m\,]\,]}$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

Demonstração da M4.

& S habitado

Apliquemos indução em $|f_0|$.

Base: Para $f_0 = \emptyset$, temos que a proposição é trivialmente verdade, pois $(\forall g \in S)[\emptyset \subseteq g]$.

Passo Indutivo: Seja $k \geq 0$. Suponha que a proposição é válida para todo $f_0$ no qual $|f_0| = k$, sendo essa nossa Hipótese de Indução. Seja $f_0 : A \rightharpoonup E$ t.q. $|f_0| = k+1$. Seja $(a, e) \in f_0$. Definimos $f_1 = f_0 - \{(a, e)\}$. Como $(a, e) \in f_0$, sabemos que $|f_1| = k$, ~~Logo, pela~~ Suponha que $f_0 \subseteq \sup S$. Sabemos que $f_1 \subseteq f_0 \subseteq \sup S$, logo $f_1 \subseteq \sup S$. Pela H.I., existe $g_1 \in S$ t.q. $f_1 \subseteq g_1$. Como $(a, e) \in f_0 \subseteq \sup S$, então existe $g_0 \in S$ t.q. $(a, e) \in g_0$. Como $S$ é chain, então $g_0 \subseteq g_1$ ou $g_1 \subseteq g_0$. Sem perda de generalidade, suponha $g_0 \subseteq g_1$. Logo, $g_0 \cup g_1 \subseteq g_1$ ~~$(a, e) \in g_1$~~, e assim teremos $f_0 = f_1 \cup \{(a, e)\} \subseteq g_1 \cup g_0 \subseteq g_1 \in S$. Assim, ~~provamos~~ nossa proposição.

Demonstração da M5.

Seja $T$ ~~uma~~ a família de conjuntos Scott open. Provemos que $T$ é topologia através de:

i) $\emptyset \in T$ e $U \in T$

Observe que a def. de Scott open é vacuamente verdade para $\emptyset$, logo $\emptyset \in T$. Sejam ~~x~~ $a$ e $b$ tais que $a \in U$ ~~x~~ e ~~b~~ $a \leq b$. É trivial que $b \in U$, logo ~~b é~~ $U$ é upwards-closed. Seja $S$ chain. É trivial que $\sup S \in U$, logo, $U$ é Scott open e $U \in T$.

ii) $A \in T$ e $B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$: Sejam $x$ e $y$ tais que $x \in A \cap B$ e $x \leq y$. Temos que $x \in A$ e $x \in B$. Como $A$ e $B$ são upwards-closed, $y \in A$ e $y \in B$, logo $y \in A \cap B$ e $A \cap B$ é upwards-closed. Seja $S$ chain t.q. $\sup S \in A \cap B$, então $\sup S \in A$ e $\sup S \in B$. Pela def. de Scott open, existem ~~x e y~~ $x, y \in S$ t.q. $x \in A$ e $y \in B$. Sem perda de generalidade, suponha $x \leq y$, logo, como $A$ é upwards-closed, $y \in A$, e assim $y \in A \cap B$. Logo, $y \in S$ e $y \in A \cap B$, e $A \cap B$ é Scott open, ou seja, $A \cap B \in T$.

iii) $F$ é uma família de Scott open $\Rightarrow \bigcup F$ é Scott open: Sejam ~~x, y e~~ $x, y$ t.q. $x \in \bigcup F$ e $x \leq y$. Logo, existe $A \in F$ t.q. $x \in A$ e $A$ é upwards-closed, logo, $y \in A$ e $y \in \bigcup F$, e $\bigcup F$ é upwards-closed. Agora, seja $S$ chain t.q. $\sup S \in \bigcup F$. Existe $A$ t.q. $\sup S \in A$ e existe $x \in S$ t.q. $x \in A$, logo, $x \in \bigcup F$. Assim, $\bigcup F$ é Scott open

# L

*Escolha até* ***duas***.

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\mathrm{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\mathrm{lfp}(T) = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) \le x \,\}.$$

**L2.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \le \mathrm{lfp}(T)$.

**L3.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \le T \uparrow (\alpha + 1)$.

**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T \uparrow \alpha \le T \uparrow \beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L3 .

$\omega$ é um ordinal específico

Apliquemos indução transfinita em $\alpha$:

Caso 0: $T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\alpha+1) \iff T\uparrow 0 \le T\uparrow 1 \iff \bot \le T(\bot)$, o que é válido, logo, vale a base.

Caso $\omega^+$ (ordinal sucessor): H.I: $T\uparrow\omega \le T\uparrow(\omega+1)$. Sabemos que $T$ é monótona, logo, através da ~~for~~ H.I., teremos: $T\uparrow\omega \le T\uparrow(\omega+1) \Rightarrow T(T\uparrow\omega) \le$ ~~T(T↑~~ $T(T\uparrow(\omega+1)) \Rightarrow T\uparrow(\omega+1) \le T\uparrow(\omega+2) \Rightarrow T\uparrow\omega^+ \le T\uparrow(\omega^+ + 1)$.

Caso $\lambda$ (ordinal limite): ~~Observe que, para todo $\alpha < \lambda$, teremos $T\uparrow\alpha \le T\uparrow\lambda$, e assim, pela monotonicidade de $T$, $T\uparrow(\alpha+1) \le T\uparrow(\lambda+1)$. Como é válido para todo $\alpha < \lambda$, isso equivale a $T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\lambda+1)$. Logo, $T\uparrow(\lambda+1)$ é upper bounde bound de $\{T\uparrow\alpha \mid \alpha<\lambda\}$, e assim, como $T\uparrow\lambda$ é lub do mesmo conjunto, temos $T\uparrow\lambda \le T\uparrow(\lambda+1)$~~ H.I. $(\forall\alpha<\lambda)[\,T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\alpha+1)\,]$. Observe que para todo $\alpha$, pela ~~H.I.~~ def. de lub, $T\uparrow\alpha \le T\uparrow\lambda$, e por monotonicidade de $T$, $T\uparrow(\alpha+1) \le T\uparrow(\lambda+1)$. Pela H.I., teremos $T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\alpha+1) \le T\uparrow(\lambda+1)$, logo, $T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\lambda+1)$, e $T\uparrow(\lambda+1)$ é upper bound de $\{T\uparrow\alpha \mid \alpha<\lambda\}$. Como $T\uparrow\lambda$ é lub do mesmo conjunto, pela def. de lub, $T\uparrow\lambda \le T\uparrow(\lambda+1)$

DEMONSTRAÇÃO DA L2 .

Apliquemos indução transfinita em $\alpha$:

Caso 0: É trivial que $T\uparrow 0 = \bot \le \mathrm{lfp}(T)$

Caso $\omega^+$: H.I. $T\uparrow\omega \le \mathrm{lfp}(T)$. Por monotonicidade, sabemos que $T(T\uparrow\omega) \le T(\mathrm{lfp}(T))$

Como $\mathrm{lfp}(T)$ é fixpoint, teremos $T\uparrow\omega^+ \le \mathrm{lfp}(T)$

Caso $\lambda$: H.I. $(\forall\alpha<\lambda)[\,T\uparrow\alpha \le \mathrm{lfp}(T)\,]$. Observe que $\mathrm{lfp}(T)$ é ~~bound~~ upper bound de $\{$~~α~~ $T\uparrow\alpha \mid \alpha<\lambda\}$, e como $T\uparrow\lambda$ é lub do mesmo conjunto, pela def. de lub,

$T\uparrow\lambda \le \mathrm{lfp}(T)$

Assim, para todo $\alpha$, $T\uparrow\alpha \le \mathrm{lfp}(T)$.

Só isso mesmo.

**M** *Escolha até **duas**.*

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\,\pi\; f\; b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \;\&\; \pi\; f_0\; b = m\,]\,]}^{\mathbf{M2} \Downarrow \quad \Uparrow \mathbf{M3}\ \underbrace{\qquad}_{}\ \pi \text{ continuous}}$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

DEMONSTRAÇÃO DA M2 .

Sejam $f : A \rightharpoonup E$, $b \in B$, $m \in M$.
$\Rightarrow$ é trivial por $\pi$ compacta
$\Leftarrow$ Seja $f_0 \subseteq_{fin} f$ t.q $\pi f_0 b = m$, como $\pi$ monótona temos $\pi f_0 \leq \pi f$. Assim $\pi f b = m$.

DEMONSTRAÇÃO DA M3 .

Compacta: trivial pois já temos a direção $\Rightarrow$
monótona: Sejam $f, g : A \rightharpoonup E$ t.q $f \leq g$. Quero $\pi f \leq \pi g$
Sejam $b \in B$, $m \in M$ t.q $\pi f b = m$. Logo seja $f_0 \subseteq_{fin} f$ t.q $\pi f_0 b = m$. Temos $f_0 \underset{fin}{\leq} g$ por transitividade, logo por $(\Leftarrow)$ temos $\pi g b = m$.

*Escolha até* ***duas.***

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\mathrm{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\mathrm{lfp}(T) = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) \leq x \,\}.$$

$\Downarrow$ U $\quad\quad$ $\Downarrow$ def S

**L2.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq \mathrm{lfp}(T)$.

**L3.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq T \uparrow (\alpha + 1)$.

**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T \uparrow \alpha \leq T \uparrow \beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L1.

Vou demonstrar que $T(\mathrm{glb}\{x \mid T(x) \leq x\}) = \mathrm{glb}\{x \mid T(x) \leq x\}$:

1 - Lower bound: Seja $x \in S$, temos $\mathrm{glb}\, S \leq x$, logo $T(\mathrm{glb}\, S) \leq T(x) \leq x$ [T monotonica e $x \in S$].

2 - O maior lower bound: Pela Primeira Parte temos $T(\mathrm{glb}\, S) \leq S$, Assim $T(\mathrm{glb}\, S) \leq \mathrm{glb}\, S$. Logo $\mathrm{glb}\, S \in S$. (Assim seja $Y \leq S$. temos $Y \leq \mathrm{glb}\, S$.)

3 - Least: Seja $x$ t.q. $T(x) = x$, logo $x \in S$ e Portanto $\mathrm{glb}\, S \leq x$.

4 - $\mathrm{glb}\, S = \mathrm{glb}\, U$: Seja $x \in U$ temos $T(x) = x$ Logo $T(x) \leq x$. Logo $x \in S$ e $\mathrm{glb}\, S \leq x$. Seja $Y \leq U$, temos $\mathrm{glb}\, S \in U$ (Por 1,2) logo $Y \leq \mathrm{glb}\, S$.

$\mathrm{glb}\, S \leq U$

DEMONSTRAÇÃO DA L2.

Por indução transfinita

Base: $T \uparrow 0 = \bot \leq \mathrm{lfp}(T)$ ✓

chamado "ordinal sucessor"

Não limit ~~Point~~ (ordinal): Sup $T \uparrow \alpha \leq \mathrm{lfp}(T)$, logo $T(T\uparrow\alpha) \leq T(\mathrm{lfp}(T))$ [T monotonica]. Assim $T \uparrow \alpha{+}1 \leq \mathrm{lfp}(T)$ já que $T(\mathrm{lfp}(T)) = \mathrm{lfp}(T)$.

Limit ~~Point~~ ordinal:

Suponha $(\forall \gamma < \alpha)[T\gamma \leq \mathrm{lfp}(T)]$. Assim $\{T\uparrow\gamma \mid \gamma < \alpha\} \leq \mathrm{lfp}(T)$.

Logo $\mathrm{lub}\{T\uparrow\gamma \mid \gamma < \alpha\} \leq \mathrm{lfp}(T)$. Portanto $T\uparrow\alpha \leq \mathrm{lfp}(T)$.

Só isso mesmo.

**M** *Escolha até* ***duas.***

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\,\pi\ f\ b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \,\&\, \pi\ f_0\ b = m\,]\,]}^{\underbrace{\pi \text{ continuous}}\quad \textbf{M2} \Downarrow \quad \Uparrow \textbf{M3}}$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

DEMONSTRAÇÃO DA M2 .

Imediato pois $\pi$ contínuo e logo $\pi$ comp. poset.

$\Leftarrow$

?

DEMONSTRAÇÃO DA M5 .

Seja $P$ inductive poset.

($\emptyset$ é Scott open): ← trivial!

(1) $\emptyset$ upwards-closed:

Seja $x \in \emptyset$.

Contradição.

(2)

Seja $C \subseteq \emptyset$ chain habitada.

Suponha $\sup C \in \emptyset$.

Contradição.

(A família de Scott opens do $P$ é Scott open):

(1) Seja $S \subseteq P$ Scott open.

Seja $R \subseteq P$ Scott open t.q. $R \supseteq S$.

**L** *Escolha até* ***duas***.

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\mathrm{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\mathrm{lfp}(T) = \mathrm{glb}\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \mathrm{glb}\{\, x \mid T(x) \le x \,\}.$$

**L2.** For all $\alpha$, $T\uparrow\alpha \le \mathrm{lfp}(T)$.

**L3.** For all $\alpha$, $T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\alpha+1)$.

**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T\uparrow\alpha \le T\uparrow\beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L2 .

Indução transfinita.

(0): Temos $\bot \le \mathrm{lfp}(T)$. ✓

(+):

Seja $\alpha$ t.q. $T\uparrow\alpha \le \mathrm{lfp}(T)$.

logo $T(T\uparrow\alpha) \le T(\mathrm{lfp}(T))$. [T-monotonic]

logo $T\uparrow\alpha^+ \le \mathrm{lfp}(T)$. [lfp] ✓

($\lambda$):

Seja $\lambda$ t.q. $(\forall\alpha<\lambda)[\,T\uparrow\alpha \le \mathrm{lfp}(T)\,]$

logo $\mathrm{lfp}(T)$ é um upper bound do $\{T\uparrow\alpha \mid \alpha<\lambda\}$. ✓

logo $\mathrm{lub}\{T\uparrow\alpha \mid \alpha<\lambda\} \le \mathrm{lfp}(T)$. [lub] ✓

logo $T\uparrow\lambda \le \mathrm{lfp}(T)$ ✓

DEMONSTRAÇÃO DA L3 .

Indução transfinita.

(0): Temos $\bot \le T\uparrow(0+1)$. ✓

(+):

Seja $\alpha$ t.q. $T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\alpha+1)$. ✓

logo $T(T\uparrow\alpha) \le T(T\uparrow(\alpha+1))$. ✓ [T monotonic]

logo $T\uparrow(\alpha+1) \le T\uparrow(\alpha+2)$. ✓

($\lambda$):

Seja $\lambda$ t.q. $(\forall\alpha<\lambda)[\,T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\alpha+1)\,]$. ✓

✗ Temos $T\uparrow(\lambda+1) = \mathrm{lub}\{T\uparrow\alpha \mid \alpha<\lambda+1\}$ ✗

? Mas $\lambda = \lambda+1$ e logo $T\uparrow(\lambda+1) = \mathrm{lub}\{T\uparrow\alpha \mid \alpha<\lambda\}$

✗ logo $T\uparrow\lambda \le T\uparrow(\lambda+1)$.

Só isso mesmo.

**L** *Escolha até **duas**.*

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\operatorname{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\operatorname{lfp}(T) = \operatorname{glb}\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \underbrace{\overbrace{\operatorname{glb}}^{g}\{\, x \mid T(x) \le x \,\}}_{G}.$$

**L2.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \le \operatorname{lfp}(T)$.
**L3.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \le T \uparrow (\alpha + 1)$.
**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T \uparrow \alpha \le T \uparrow \beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L1 .

Seja $\boxed{G = \{x \mid T(x) \le x\}}$

Seja $\boxed{g = \operatorname{glb}(G)}$

difícil acompanhar!

Queremos $g = \operatorname{lfp}(T)$.

Seja $x \in G$.

Temos $g \le x$, pois $g$ é $\operatorname{glb}(G)$

Temos também $T(g) \le T(x)$ ✓ [T é mono]

Como, $T(x) \le x$ [$x \in G$] ✓

Então, $T(g) \le x$ ✓ [transitividade de $\le$] ✓

Então $T(g) \in \operatorname{lb}(G)$, ✓ mas $T(g) \le g$, pois $g$ é $\operatorname{glb}(G)$ ✓

Como $T(g) \le g$, $g \in G$. [def. G].

$T(g) \le g \to T(T(g)) \le T(g)$ [T mono]

Logo, $T(g) \in G$ [def. G] ✓

Logo, $g \le T(g)$ [$g$ é $\operatorname{glb}(G)$] ✓

Como, $g \le T(g)$ e $T(g) \le g$

Então, $g = T(g)$ ✓

Logo, $g$ é fixpoint de $T$ ✓

Como $g$ é fxp e glb, então $g \neq \operatorname{lfp}(T)$

Queremos $g = \operatorname{glb}\{x \mid T(x) = x\}$

Note que $\{x \mid T(x) = x\} \subseteq G$ ✓ $g \le \operatorname{glb}\{x \mid Tx = x\}$

e que $T(g) = g$ [pois $g$ é fixpoint] ✓

Logo, $g \in \{x \mid T(x) = x\}$ ✓ $g \ge \operatorname{glb}\{x \mid Tx = x\}$

Logo, $g = \operatorname{glb}\{x \mid T(x) = x\}$. ✓

DEMONSTRAÇÃO DA L3 .

Caso: $\alpha = 0$

$T\uparrow(\alpha) = T\uparrow(0)$
$= \bot$
$\le T(\bot)$ [def. ⊥]
$= T(T\uparrow(\bot))$ [def. T↑]
$= T(T\uparrow\alpha)$ [def. T↑
$= T\uparrow\alpha+1$ [def. T↑]

complicou demais!

~~Seja ordinal, tal que $\beta+1 = \alpha$.~~

~~Temos $\alpha \le \alpha+1$.~~ Indução no tamanho do ordinal $\alpha$.

a palavra «tamanho» indica cardinalidade

H.I.: $T\uparrow(\alpha) \le T\uparrow(\alpha+1)$

alvo: $T\uparrow(\alpha+1) \le T\uparrow(\alpha+1+1)$

$T\uparrow(\alpha+1) = T(T\uparrow(\alpha))$ [def. T↑].
e
$T\uparrow(\alpha+1+1) = T(T\uparrow(\alpha+1))$ [def. T↑].

Pela HI. $T\uparrow(\alpha) \le T\uparrow(\alpha+1)$

Logo, $T(T\uparrow(\alpha)) \le T(T\uparrow(\alpha+1))$ [T é mono].

ficou caótico.

limit?

Só isso mesmo.

## M

*Escolha até **duas**.*

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{\qquad \pi \text{ continuous} \qquad}$$

$$\mathbf{M2} \Downarrow \quad \Uparrow \mathbf{M3}$$

$$\overbrace{(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\,\pi\ f\ b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \&\ \pi\ f_0\ b = m\,]\,]}$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

DEMONSTRAÇÃO DA M4.

Por indução no $|$dom da $f_0|$!

Base ($f_0$ mapeia ninguém):

Seja $g \in S$ (já que $S \neq \emptyset$). Imediatamente $f_0 \subseteq g$.

Passo Indutivo:

Seja $k \in \mathbb{N}$ tq $(\forall D)[k = |D|$ e $D = \mathrm{dom}(f_0) \Rightarrow (\exists g \in S)[f_0 \subseteq g]]$.

Seja $D$ o domínio do $f_0$ com tamanho $k+1$ e seja $(x,y) \in \mathrm{graf}(f_0)$.

Seja ~~temos~~ $f$ tq $f_0 = f \cup \{(x,y)\}$.

Como $|\mathrm{dom}(f)| = k$, logo seja $g \in S$ tq $f \subseteq g$. (HI).

Como $f_0 \subseteq \sup S$ e $(x,y) \in f_0$, Logo $(x,y) \in \sup S$. [Lema 1]

Logo seja $h \in S$, tq $(x,y) \in h$.

Como $S$ chain, logo $g \subseteq h$ ou $h \subseteq g$.

Caso $g \subseteq h$: logo $f_0 \subseteq h$.

Caso $h \subseteq g$: logo $f_0 \subseteq g$.

DEMONSTRAÇÃO DA M5. Seja $P$ um indutivo poset. :D

$\emptyset$ é Scott:

vacuamente temos (1) e (2).

$P$ é scott.

(1): Seja $x \in P$ e $x \leq y$. $y \in P$.

(2): Seja $C \subseteq P$ habitado tq $\sup C \in P$. Como $C$ habitado, seja $c \in C$. temos $c \in P$.

Intersecções binárias:

Sejam $A, B$ scott-open. Quero $A \cap B$ scott.

(1): Seja $x \in A \cap B$ e seja $y$ tq $x \leq y$. De $A$ scott, $y \in A$. De $B$ scott, $y \in B$, logo $y \in A \cap B$.

(2): Seja $C$ chain habitada de $P$ tq $\sup C \in A \cap B$. Logo $\sup C \in A$ e $\sup C \in B$. Como $\sup C \in A$, seja $a \in C$ tq $\in A$. Seja $b \in C$ tq $b \in B$. Como $C$ chain, $a \leq b$ ou $b \leq a$. S.p.d.g $a \leq b$, Logo $b \in A$, logo $b \in A \cap B$.

Uniões Arbitrárias:

Sejam $\{A_i\}_{i \in I}$ família de op. scotts.

(1) Seja $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ e seja $y$ tq $x \leq y$. Seja $i$ tq $x \in A_i$. Logo $y \in A_i$ e logo $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

(2) Seja $C$ chain habitada tq $\sup C \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Seja $i$ tq $\sup C \in A_i$. Logo seja $c \in C$ tq $c \in A_i$ (pois $A_i$ scott), Temos então $c \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

**L** *Escolha até* ***duas.***

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\operatorname{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\operatorname{lfp}(T) = \operatorname{glb}\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \operatorname{glb}\{\, x \mid T(x) \le x \,\}.$$

Sorry usei Sn invés de n+1.

o dia que «sorry» nasceu...

**L2.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \le \operatorname{lfp}(T)$.

**L3.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \le T \uparrow (\alpha + 1)$. $\alpha$ continuous?

**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T \uparrow \alpha \le T \uparrow \beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L2.

Por indução transfinita no $\alpha$.

Caso $\alpha := 0$:
Temos $T\uparrow 0 = \bot$ e temos imediatamente $\bot \le \operatorname{lfp}(T)$.

Caso $\alpha := Sn$: assim parece natural
Seja $n$ tq $T\uparrow n \le \operatorname{lfp}(T)$. HI.
Temos $T\uparrow Sn = T(T\uparrow n)$.
Como $T$ monotona, pela HI temos $T(T\uparrow n) \le T(\operatorname{lfp}(T)) = \operatorname{lfp}(T)$. $\alpha$ fixpoint

Caso $\alpha$ limit. seja mais grego na vida!
Considere $(\forall n < \alpha)[T\uparrow n \le \operatorname{lfp}(T)]$. H.I.
Temos $T\uparrow\alpha = \sup\{T\uparrow n \mid n < \alpha\}$.
Seguindo a definição de sup, basta que $\operatorname{lfp}(T)$ seja um upper bound de $\{T\uparrow n \mid n < \alpha\}$:
Seja $x \in \{T\uparrow n \mid n < \alpha\}$. Logo, pela HI., $T\uparrow x \le \operatorname{lfp}(T)$.
Logo $\operatorname{lfp}(T)$ U.B. e logo $\sup\{T\uparrow n \mid n < \alpha\} \le \operatorname{lfp}(T)$.

DEMONSTRAÇÃO DA ~~L3~~ L4.

~~Por indução transfinita no $\alpha$:~~
~~Caso $\alpha := 0$:~~
~~Temos $T\uparrow 0 = \bot$. Imediato.~~
~~Caso $\alpha := Sn$:~~
~~Seja $n$ tq $T\uparrow n \le T\uparrow(Sn)$, HI como $T$ monotona, $T(T\uparrow n) \le T(T\uparrow(Sn))$~~
~~Logo $T\uparrow(Sn) \le T\uparrow(S(Sn))$, pois $T(T\uparrow n) = T\uparrow(Sn)$ e $T(T\uparrow(Sn)) = T\uparrow(S(S(n)))$.~~
~~Caso $\alpha$ limit: $(\forall n < \alpha)[T\uparrow n \le T\uparrow(Sn)]$: $T\uparrow(S\alpha) = T(T\uparrow\alpha)$.~~
~~Suponha $T\uparrow\alpha = \sup\{T\uparrow n \mid n < \alpha\}$ e~~
~~temos $T\uparrow\alpha = \sup\{T\uparrow n \mid n < \alpha\})$?~~
~~$T(T\uparrow\alpha) = T(\sup\{T\uparrow n \mid n < \alpha\})$~~
~~$= \sup\{T\uparrow Sn \mid n < \alpha\}$~~
~~$= ?$~~

L4: Indução em $\beta$.
Caso $\beta = 0$:
vaciamente.
Caso $\beta = Sn$: $(\forall\alpha)[\alpha < n \Rightarrow T\uparrow\alpha \le T\uparrow n]$.
Seja $n$ tq
Seja $\alpha < Sn$:
Caso $\alpha = n$: $T\uparrow n \le T\uparrow Sn$ (L3) | Caso $\alpha < n$: $T\uparrow\alpha \le T\uparrow n$ (HI) $\le T\uparrow Sn$ (L3)

não precisa

Caso $\beta$ limit:
Suponha $(\forall\alpha)(\forall n < \beta)[\alpha < n \Rightarrow T\uparrow\alpha \le T\uparrow n]$
Seja $\alpha < \beta$.
Temos $T\uparrow\beta = \sup\{T\uparrow n \mid n \in \beta\}$.
Basta $T\uparrow\alpha \in \{T\uparrow n \mid n \in \beta\}$.
Sim, pois $\alpha < \beta$.

Só isso mesmo.

## M

*Escolha até **duas**.*

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{\phantom{xxxxxxxx}}^{\pi \text{ continuous}}$$

$$\text{M2} \Downarrow \quad \Uparrow \text{M3}$$

$$\overbrace{(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\,\pi\, f\, b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \;\&\; \pi\, f_0\, b = m\,]\,]}$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

DEMONSTRAÇÃO DA M5 .

O $\emptyset$ é aberto por vacuidade. ✓

É imediato P fechado por cima. ✓

Seja $C \subseteq P$, uma cadeia não vazia, t.q. $\sup C \in P$, tome $\sup C$ como testemunha ✗ tvc $\sup C \notin C$ ✗

Sejam $A, B \subseteq P$, t.q $A, B$ são Scott-open

Seja $x \in A \cap B$, logo $x \in A$ e $x \in B$. ✓

Como $A$ é Scott-open, seja $y \in A$, t.q $y \geq x$. ✓

Similar para $x \in B$. ✓

Logo $y \in A \cap B$. e $y \geq x$.

Seja $C \subseteq A \cap B$ uma cadeia habitada, t.q. $\sup C \in A \cap B$.

Daí, $\sup C \in A$ e $\sup C \in B$.

Logo, como $A$ é Scott-open, seja $x \in C$. arbitrário?

Daí, temos que $x \in A \cap B$.

Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos Scott-open.

Seja $A_i \in \bigcup \mathcal{A}$

Como $A_i$, para todo $i \in I$, é Scott-open, seja $x \in A_i$, t.q. $A_i \leq x$.

Daí, temos $\bigcup \mathcal{A} \leq x$. ? ? ✗

DEMONSTRAÇÃO DA M1 .

Vamos demonstrar que existe exatamente um SLFP. $x^*$. ✓

Para isso, vamos definir a sequência $(x_n)_n$ recursivamente: ✓

$x_0 = \bot$ (1) ✓

$x_{n+1} = \pi(x_n)$ (2)

(existência)

Definimos $x^* = \lim_n x_n = \sup P$.

calculamos:

$\pi x^* = \pi(\lim_n x_n)$ [D.F. $x^*$]

$= \lim_n (\pi x_n)$ [C+S]

$= \lim_n x_{n+1}$ [(2) ←]

$= x^*$ ✓

Por indução no $n$. ✓

Base: $x_0 = \bot \leq y$, para todo $y \in P$.

Passo indutivo:

Seja $y \in P$, t.q. $\pi(y) \leq y$. (3) Seja $x_n \in P$, t.q. $x_n \leq y$.

Daí, temos:

$x_n \leq y \Rightarrow \pi(x_n) \leq \pi(y)$ [~~C+S~~] monotone

$\Rightarrow x_{n+1} \leq \pi(y)$ [(2)]

$\Rightarrow x_{n+1} \leq y$ [(3)]

não confunda se... então... com como... logo...! ✓

**L** *Escolha até **duas**.*

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\mathrm{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\mathrm{lfp}(T) = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) \leq x \,\}\,.$$

**L2.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq \mathrm{lfp}(T)$.

**L3.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq T \uparrow (\alpha + 1)$.

**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T \uparrow \alpha \leq T \uparrow \beta$.

não use essa terminologia aqui

DEMONSTRAÇÃO DA L2 .

Por indução transfinita

Base: $T\uparrow 0 \leq \mathrm{lfp}(T)$:

$T\uparrow 0 \leq \bot$

$\leq \mathrm{lfp}(T)$

PI 1: Seja $\alpha \in L$, t.q. $T\uparrow\alpha \leq \mathrm{lfp}(T)$. (HI)

Calculamos:

$T\uparrow\alpha^+ = T(T\uparrow\alpha)$ (T.2)

$\leq T(\mathrm{lfp}(T))$ [HI]

$= \mathrm{lfp}(T)$ (Fp)

PI 2: Seja $\lambda \in L$, t.q. $(\forall \alpha < \lambda)[T\uparrow\alpha \leq \mathrm{lfp}(T)]$ (HI)

Calculamos:

$T\uparrow\lambda = \mathrm{lub}\{T\uparrow\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ [T.3]

$\leq \mathrm{lfp}(T)$ [HI e Fp].

?

DEMONSTRAÇÃO DA L3 .

Por indução transfinita

~~Base~~: $(T\uparrow 0 \leq T\uparrow 1)$

$T\uparrow 0 = \bot$

$\leq T\uparrow 1$

limit ?

~~PI~~ 1: Seja $\alpha \in L$, t.q. $T\uparrow\alpha \leq T\uparrow\alpha^+$:

Calculamos:

$T\uparrow(\alpha+) = T(T\uparrow\alpha)$ [T.2]

$\leq T(T\uparrow\alpha^+)$

$= T\uparrow(\alpha+2)$ [T.2 ←]

Só isso mesmo.

# M

*Escolha até* ***duas***.

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{M2}\Downarrow \quad \Uparrow\text{M3}}}^{\pi \text{ continuous}}$$

$$(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\pi\, f\, b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \;\&\; \pi\, f_0\, b = m]]$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

Demonstração da M1.

Definimos $x_0 = \bot$, $x_{n+1} = \pi(x_n)$, e $x^* = \lim_n x_n$.

(fixpoint) Note que $\pi(x^*) = \pi(\lim_n x_n)$
$= \lim_n \pi(x_n)$ [$\pi$ $\omega$-conti]
$= \lim_n x_{n+1}$
$= \lim_n x_n = x^*$.

Confiamos?

(strongly least) Seja $l$ tal que $\pi(l) \leq l$.
Note que $\bot \leq l$, e $\pi(\bot) \leq \pi(l) \leq l$. Por indução, pela monotonicidade da $\pi$, $x_n \leq l$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Como $x^*$ é o limite da sequência, temos $x^* \leq l$ ∎

Demonstração da M5.

Seja $P$ poset indutivo. $\emptyset$ é open por vacuidade, e o $P$ é trivialmente open.

Sejam $A, B \subseteq P$ Scott-open. Tome $x \in A \cap B$ e $y \in P$ com $x \leq y$.
Como $x \in A$ e é open, $y \in A$. Similarmente, $y \in B$.
Logo $y \in A \cap B$.
Seja agora $S \subseteq P$ chain hab. com $\sup S \in A \cap B$.
Como $\sup S \in A$, um open, seja $a \in S \cap A$. Analogamente, seja $b \in S \cap B$.
Como $S$ é chain, suponha $a \leq b$. Logo $b \in A$, pois $a \in A$, open.

S.p.d.g.

Logo, $b \in A \cap B$.

Seja $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ família de opens. Sejam $x \in \bigcup \mathcal{S}$ e $y \in P$, $x \leq y$. Temos $x \in S_i$, p/ algum $i \in I$. Sendo $S_i$ open temos $y \in S_i$, logo $y \in \bigcup \mathcal{S}$.
Seja $C$ chain com $\sup C \in \bigcup \mathcal{S}$. Logo $\sup C \in S_i$, para algum $i \in I$. Como $S_i$ é open, seja $s \in C \cap S_i$.
Logo $s \in \bigcup \mathcal{S}$, donde $s \in C \cap (\bigcup \mathcal{S})$ ∎.

**L** *Escolha até **duas**.*

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\text{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\text{lfp}(T) = \text{glb}\,\{\,x \mid T(x) = x\,\} = \text{glb}\,\{\,x \mid T(x) \leq x\,\}.$$

**L2.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq \text{lfp}(T)$.

**L3.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq T \uparrow (\alpha + 1)$.

**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T \uparrow \alpha \leq T \uparrow \beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L2 .

Por indução transfinita sobre $\alpha$.

Caso 0: logo $T\uparrow 0 = \bot \leq \text{lfp}(T)$.

Caso $\alpha^+$: note que, pela hip. indutiva, $T\uparrow\alpha \leq \text{lfp}(T)$.
Logo, pela monotonicidade da $T$, temos
$$\underbrace{T(T\uparrow\alpha)}_{=T\uparrow\alpha^+} \leq T(\text{lfp}(T)) = \text{lfp}(T).$$

Caso $\lambda$: como $T\uparrow\lambda = \text{lub}\{T\uparrow\alpha : \alpha < \lambda\}$, basta que o $\text{lfp}(T)$ seja um upper bound do conjunto.
Tome $\alpha < \lambda$. Pela hipótese indutiva, temos $T\uparrow\alpha \leq \text{lfp}(T)$.
Logo $\{T\uparrow\alpha : \alpha < \lambda\} \leq \text{lfp}(T)$ ∎

DEMONSTRAÇÃO DA L4 .

Por indução transfinita sobre $\beta$.

Caso 0: válido por vacuidade.

Caso $\beta^+$: seja $\alpha < \beta^+$. Logo $\alpha \leq \beta$.
Se $\alpha = \beta$, então
$$T\uparrow\alpha \leq T(T\uparrow\alpha) \leq T(T\uparrow\beta) = T\uparrow\beta^+, \text{ usando L3.}$$
Se $\alpha < \beta$, então, pela hip. indutiva, $T\uparrow\alpha \leq T\uparrow\beta$. Logo $T\uparrow\alpha \leq T\uparrow\alpha^+ \leq T\uparrow\beta^+$, usando L3 e a monotonicidade da $T$.

Caso $\lambda$: seja $\alpha < \lambda$.
Como $T\uparrow\lambda = \text{lub}\{T\uparrow\alpha' : \alpha' < \lambda\}$, temos trivialmente $T\uparrow\alpha \leq T\uparrow\lambda$ ∎

Só isso mesmo.

M

*Escolha até **duas**.*

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{\hspace{3cm}}^{\pi \text{ continuous}}$$

**M2** $\Downarrow$ $\Uparrow$ **M3**

$$\overbrace{(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\,\pi\ f\ b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \ \&\ \ \pi\ f_0\ b = m\,]\,]}$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

DEMONSTRAÇÃO DA M5 .

Seja $P$ poset e $\mathcal{S}$ o conjunto de scott-opens de $P$.

I. É trivial mostrar $\emptyset$ e $P$ scott-open! :: estranho!

II. Suponha $G, H$ scott-open.

(1) Seja $x \in G \cap H$ e $x \leq y$. Logo $x \in G$ e $x \in H$. Por hipótese temos $y \in G$ e $y \in H$. Portanto, $G \cap H$ é fechado por cima.

(2) Seja $C \subseteq P$ chain tq. $\sup C \in G \cap H$. Então $\sup C \in G$ e $\sup C \in H$. Daí, sejam $g \in C, H$ ?! e $h \in C, H$. Como $C$ chain temos $g \leq h$ ou $h \leq g$. S.p.g., como $g \leq h$ logo $h \in G$, pela escolha do $G$. não funciona bem assim «S.p.d.g. suponha __ .»

isso implica contável

III. Suponha $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots\}$ família de scott-opens.

(1) Seja $x \in \bigcup \mathcal{G}$ e $x \leq y$. Logo $x \in G_i$ $\boxed{\text{para}}$ $i \geq 0$. Daí, $y \in G_i$, logo $y \in \bigcup \mathcal{G}$.

(2) Seja $C \subseteq P$ chain tq. $\sup C \in \bigcup \mathcal{G}$. Daí, $\sup C \in G_i$, para $i \geq 0$. Seja $c \in C$, tq. $c \in G_i$, logo $c \in \bigcup \mathcal{G}$. «para» malandro!

tecnicamente não há 'i' no escopo

DEMONSTRAÇÃO DA M4 .

Indução no tamanho de $f_0$.

Caso $|f_0| = 0$:

Seja $g \in S$, logo $\emptyset \subseteq g$.

Caso $|f_0| = n+1$:

por que dar nome?

Seja $f_1 \subseteq \sup S$ tq. $|f_1| = n$ e $g_1 \in S$ tq. $f_1 \subseteq g_1$; e seja $h = \{(x,y)\}$ tq. $f_0 = f_1 \uplus h$.

**L** *Escolha até* ***duas***.

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.

**L1.** $T$ has a least fixpoint $\mathrm{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\mathrm{lfp}(T) = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) \le x \,\}.$$

**L2.** For all $\alpha$, $T\uparrow\alpha \le \mathrm{lfp}(T)$.

**L3.** For all $\alpha$, $T\uparrow\alpha \le T\uparrow(\alpha+1)$.

**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T\uparrow\alpha \le T\uparrow\beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L3 .

Indução transfinita no $\alpha$.

Caso $\alpha = 0$: Trivial. hmm...

Caso $\alpha = \alpha^+$: evite essa reutilização de variável no padrão.

~~Calculamos~~ Suponha $T\uparrow\alpha \le T\uparrow\alpha^+$.

Calculamos ~~[illegible]~~

$T\uparrow\alpha \le T\uparrow\alpha^+$ [Hi]

$T(T\uparrow\alpha) \le T(T\uparrow\alpha^+)$ [mono T]

$T\uparrow\alpha^+ \le T\uparrow\alpha^{++}$.

Caso $\alpha = \lambda$: $\lambda$ é apenas um nome comum para denotar limit ordinals

~~[illegible]~~ Seja $\alpha < \lambda$ tq. $T\uparrow\alpha \le T\uparrow\alpha^+$. Basta mostrar que $T\uparrow\lambda^+$ é u.b. de $\{T\uparrow\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Calculamos

$T\uparrow\alpha \le T\uparrow\lambda$ [Hi]

não é um cálculo

$T\uparrow\alpha^+ \le T\uparrow\lambda^+$ [T mono]

$T\uparrow\alpha \le T\uparrow\lambda^+$ [Hi]

DEMONSTRAÇÃO DA L4 .

Indução transfinita no $\beta$

Caso $\beta = 0$:

Suponha $\alpha < 0$. Contradição.

Caso $\beta = \beta^+$:

Seja $\alpha < \beta$ tq. $T\uparrow\alpha \le T\uparrow\beta$. Suponha $\alpha < \beta^+$.

Calculamos

$T\uparrow\alpha \le T\uparrow\beta$ [Hi]

$T(T\uparrow\alpha) \le T(T\uparrow\beta)$ [mono T]

$T\uparrow\alpha^+ \le T\uparrow\beta^+$ estranho. Calcule!!

$T\uparrow\alpha \le T\uparrow\beta^+$ [L3]

Caso $\beta = \lambda$: Trivial pela Hi. hmm...

Só isso mesmo.

(D)

# M

*Escolha até **duas**.*

**M1.** Every countably continuous monotone mapping $\pi : P \to P$ on an inductive poset has exactly one strongly least fixpoint $x^*$.

Let $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$.

$$\overbrace{\underbrace{\pi \text{ continuous}}}$$

$$\mathbf{M2} \Downarrow \quad \Uparrow \mathbf{M3}$$

$$\overbrace{(\forall f : A \rightharpoonup E)(\forall b \in B)\,(\forall m \in M)\,[\,\pi\; f\; b = m \iff (\exists f_0 \subseteq f)\,[\,f_0 \text{ is finite } \;\&\; \pi\; f_0\; b = m\,]\,]}$$

**M4.** If $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ is a non-empty chain in a partial function poset and $f_0 \subseteq \sup S$ is a finite function, then there exists some $g \in S$ such that $f_0 \subseteq g$.

**M5.** The family of Scott open subsets of an inductive poset is a topology.

DEMONSTRAÇÃO DA M5.

Seja $P$ poset indutivo.

- Note que $\emptyset$ é Scott-open por vacuidade, e $P$ é Scott-open trivialmente. ✓
- Sejam $G, G' \subseteq P$ Scott-opens. Queremos $G \cap G'$ Scott-open ✓
  (1) Sejam $x \in G \cap G'$ e $y \in P$ tais que $x \leq y$. Como $G$ é Scott-open, temos $y \in G$. Similarmente, temos $y \in G'$. Logo, $y \in G \cap G'$. ✓
  (2) Seja $C \subseteq P$ uma chain habitada tal que $\sup C \in G \cap G'$. Logo, como $G$ e $G'$ são Scott-open, sejam $c, c' \in C$ tais que $c \in G$ e $c' \in G'$. Como $\max\{c, c'\} \geq c, c'$ e $G, G'$ são Scott-open, temos $\max\{c, c'\} \in G \cap G'$. Note também que $\max\{c, c'\} \in C$.
- Seja $\mathcal{G}$ coleção de Scott-opens (finalmente s.s.p.d.g. ü)
  (1) Sejam $x \in \bigcup \mathcal{G}$ e $y \in P$ tais que $x \leq y$. Logo, seja $G \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G$. Como $G$ é Scott-open, temos $y \in G$. Logo, $y \in \bigcup \mathcal{G}$.
  (2) Seja $C \subseteq P$ chain habitada tal que $\sup C \in \bigcup \mathcal{G}$. Logo, seja $G \in \mathcal{G}$ tal que $\sup C \in G$. ✓
  Como $G$ é Scott-open, seja $c \in C$ tal que $c \in G$. Logo $c \in \bigcup \mathcal{G}$.

DEMONSTRAÇÃO DA M3.

monótona: Sejam $f, g : A \rightharpoonup E$ tais que $f \leq g$, e sejam $b \in B$ e $m \in M$ tais que $\pi f b = m$. ✓
Logo, seja $f_0 \subseteq f$ tal que $f_0$ é finita e $\pi f_0 b = m$, por ($\Rightarrow$). ✓
Como $f \leq g$, temos $f_0 \leq g$. Logo, pelo ($\Leftarrow$), temos $\pi g b = m$.

compacta: imediato, pela ($\Rightarrow$). ✓

## L

*Escolha até **duas**.*

Let $L$ be a complete lattice and $T : L \to L$ be a monotonic endomap.
**L1.** $T$ has a least fixpoint $\mathrm{lfp}(T)$. Furthermore,

$$\mathrm{lfp}(T) = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) = x \,\} = \mathrm{glb}\,\{\, x \mid T(x) \leq x \,\}\,.$$

**L2.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq \mathrm{lfp}(T)$.
**L3.** For all $\alpha$, $T \uparrow \alpha \leq T \uparrow (\alpha + 1)$.
**L4.** For all $\alpha, \beta$, $\alpha < \beta \implies T \uparrow \alpha \leq T \uparrow \beta$.

DEMONSTRAÇÃO DA L3 .

Por indução transfinita.
Caso $\alpha = 0$: $T \uparrow 0 = \bot \leq T(\bot) = T \uparrow 1$
Caso $\alpha$ é sucessor:
Por hipótese indutiva, temos $T \uparrow (\alpha - 1) \leq T \uparrow \alpha$. Logo, como $T$ é monotônica, temos $T(T \uparrow (\alpha - 1)) \leq T(T \uparrow \alpha)$, ou seja, $T \uparrow \alpha \leq T \uparrow (\alpha + 1)$
Caso $\alpha$ é limit ordinal:
Como $T \uparrow \alpha = \sup \{ T \uparrow \gamma \mid \gamma < \alpha \}$, basta mostrar $T \uparrow \gamma \leq T \uparrow (\alpha + 1)$, para todo $\gamma < \alpha$
Logo, seja $\gamma < \alpha$. Note que $T \uparrow \gamma \leq T \uparrow \alpha$, por definição de sup.
Como $T$ é monotônica, temos $T(T \uparrow \gamma) \leq T(T \uparrow \alpha)$, ou seja, $T \uparrow (\gamma + 1) \leq T \uparrow (\alpha + 1)$.
Mas por hipótese indutiva, temos $T \uparrow \gamma \leq T \uparrow (\gamma + 1)$. Logo, $T \uparrow \gamma \leq T \uparrow (\alpha + 1)$

DEMONSTRAÇÃO DA L2 .

Por indução transfinita
Caso $\alpha = 0$: $T \uparrow 0 = \bot \leq \mathrm{lfp}(T)$.
Caso $\alpha$ é sucessor:
Por hipótese indutiva, temos $T \uparrow (\alpha - 1) \leq \mathrm{lfp}(T)$. Logo, como $T$ é monotônica, temos $T(T \uparrow (\alpha - 1)) \leq T(\mathrm{lfp}(T))$, ou seja, $T \uparrow \alpha \leq T(\mathrm{lfp}(T))$. Como $\mathrm{lfp}(T)$ é fixpoint de $T$, temos $T(\mathrm{lfp}(T)) = \mathrm{lfp}(T)$. Logo, $T \uparrow \alpha \leq \mathrm{lfp}(T)$.
Caso $\alpha$ é limit ordinal:
Por hipótese indutiva, temos $T \uparrow \gamma \leq \mathrm{lfp}(T)$, para todo $\gamma < \alpha$.
Logo, $T \uparrow \alpha = \sup \{ T \uparrow \gamma \mid \gamma < \alpha \} \leq \mathrm{lfp}(T)$, por definição de sup.

Só isso mesmo.