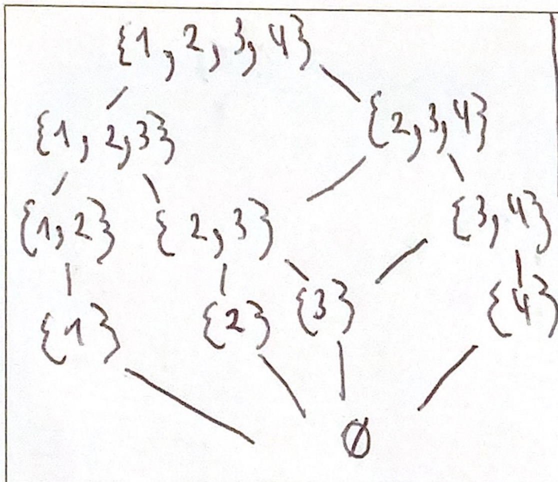
(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

Resolução.



Vou refutar.
Basta eu achar um contra-exemplo que mostre que $\mathcal{K}4$ não é fechado sob operação $\wedge$ ou $\vee$.
Vou demonstrar a segunda opção (não é $\vee$-fechado).
Sejam A e B elementos de $\mathcal{K}4$ t.q $A := \{1\}$ e $B := \{3\}$.
~~Ambos~~
calculando o join em $\wp 4$ deles:
$A \vee B := A \cup B = \{1\} \cup \{3\}$
$= \{1, 3\}$.
Mas $\{1,3\}$ não está no diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$.
■

(32) **H** (Demonstrar) (contexto de Lattice) *Escolha uma das* **H1**, **H2**.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$
Resolução da H1.

Seja L Lattice.
Sejam $a, b \in L$ t.q $a \leq b$.
Logo $a \vee b = b$. (H1)
Perceba que $x \wedge b \leq b$. (H3) [(Definição de $\wedge$)].
Logo $a \vee (x \wedge b) \leq a \vee b$. [?]
Logo $a \vee (x \wedge b) \leq b$. [(h1)]
Perceba que $b \leq (a \wedge x) \vee b$. [(Definição de $\vee$)]
Como $a \vee (x \wedge b) \leq b$ & $b \leq (a \wedge x) \vee b$, Logo $a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$. ([Transitividade])
■

(veja a dica [p.40-41])

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para paixo e } (\vee)\text{-fechado;}$$
$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)\,(\forall i \in I)\,[\,x \wedge i \in I\,]\,.$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte ($\Rightarrow$).
Suponha I o-ideal.
Seja $x \in L$.
Seja $i \in I$.
Perceba que $x \wedge i \leq i$ [(definição de $\wedge$)].
Como I é fechado para baixo e $x \wedge i \leq i$, $x \wedge i \in I$.
Parte ($\Leftarrow$)
Suponha I a-ideal.
Parte I fechado por baixo.

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

DEFINIÇÃO.

$(L \setminus I)$ = complemento

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L \setminus J$ filtro.

RESPOSTA.

$I \trianglelefteq L \overset{\text{def}}{\iff} I$ é ideal de L

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

Resolução.

(32) **H** *Escolha* ***uma*** *das* **H1**, **H2**.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$
Resolução da H2 .

Basta demonstrar $d \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$ & $(a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$. [($\wedge$).3]
Parte $d \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$:
Basta demonstrar que $d \geq (d \wedge a)$ & $d \geq (d \wedge b)$. [($\vee$).3]
Parte $d \geq (d \wedge a)$:
Imediato. [($\wedge$).1]
Parte $d \geq (d \wedge b)$: similar
Parte $(a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$:
Basta demonstrar $(a \vee b) \geq (d \wedge a)$ & $(a \vee b) \geq (d \wedge b)$. [($\vee$).3]
Parte $(a \vee b) \geq (d \wedge a)$:
Temos que $(a \vee b) \geq a$ & $a \geq (d \wedge a)$. [($\vee$).1; ($\wedge$).1]
Logo, $(a \vee b) \geq (d \wedge a)$. [($\geq$).3]
Parte $(a \vee b) \geq (d \wedge b)$:
Temos que $(a \vee b) \geq b$ & $b \geq (d \wedge b)$. [($\vee$).2; ($\wedge$).2]
Logo, $(a \vee b) \geq (d \wedge b)$. [($\geq$).3]

Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais.
Resposta.

Seja $J \trianglelefteq M$.
Sejam $x \in L$ e $y \in J$, $\overbrace{\varphi^{-1}[J]}^{\text{TYPE ERROR}}$
Logo, $\varphi(x) \wedge j \in J$. $[J \trianglelefteq M]$
Logo, $\varphi^{-1}(\varphi(x) \wedge j) \in \varphi^{-1}[J]$.
Logo, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \wedge \varphi^{-1}[j] \in \varphi^{-1}[J]$. [$\varphi$ homo]
Logo, $x \wedge \varphi^{-1}[j] \in \varphi^{-1}[J]$.

tá confundindo (muito)
as $\varphi^{-1}[-]$ e φ^{-1} (que nem temos aqui)

(16) **I5.** Se φ sobrejetivo, então φ preserve os ideais.
Resposta.

Seja $I \trianglelefteq L$.
Suponha φ sobre
Sejam $m \in M$ e $a \in \varphi[I]$
Logo, seja $x \in L$ t.q. $\varphi(x) = m$. [φ sobre]
Logo, φ

Só isso mesmo.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO.

(32) **H** *Escolha* **uma** *das* **H1**, **H2**.

a, b, x, d membros de um reticulado

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$

H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$

RESOLUÇÃO DA H1 .

Suponha $a \leq b$. -- Ou seja, $a \vee b = b$

Basta demonstrar que $a \leq (a \wedge x) \vee b$ e $x \wedge b \leq (a \wedge x) \vee b$.

Parte $a \leq (a \wedge x) \vee b$: no more «basta»?

Calc.:

$$
\begin{aligned}
& a \vee ((a \wedge x) \vee b) \\
&= a \vee (b \vee (a \wedge x)) && [(\vee)\text{-com}] \\
&= (a \vee b) \vee (a \wedge x) && [(\vee)\text{-assoc}] \\
&= b \vee (a \wedge x) && [\text{hyp}] \\
&= (a \wedge x) \vee b. && [(\vee)\text{-com}]
\end{aligned}
$$

Logo, $a \leq (a \wedge x) \vee b$.

Parte $x \wedge b \leq (a \wedge x) \vee b$:

Calc.:

$$
\begin{aligned}
& (x \wedge b) \vee ((a \wedge x) \vee b) \\
&= ((x \wedge b) \vee (a \wedge x)) \vee b && [(\vee)\text{-assoc}] \\
&= ((a \wedge x) \vee (x \wedge b)) \vee b && [(\vee)\text{-com}] \\
&= (a \wedge x) \vee ((x \wedge b) \vee b) && [(\vee)\text{-assoc}] \\
&= (a \wedge x) \vee (b \vee (b \wedge x)) && [(\vee)\text{-com}; (\wedge)\text{-com}] \\
&= (a \wedge x) \vee b. && [\text{absorção}]
\end{aligned}
$$

Logo, $x \wedge b \leq (a \wedge x) \vee b$.

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para baixo e } (\vee)\text{-fechado};$$
$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)\,(\forall i \in I)\,[\,x \wedge i \in I\,]\,.$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

Demonstração.

Parte ($\Rightarrow$):

Suponha I o-ideal.

-- ALVO: $(\forall x\in L)(\forall i\in I)[x\wedge i\in I]$

Sejam $x\in L$ e $i\in I$.

Logo, $x\leq i \Rightarrow x\in I$. (h1) [I fechado p/baixo]

Separo em casos. ✗ não tens essa disjunção nos teus dados!

~~Caso $x\leq i$:~~

~~Temos que $x\in I$. [h1]~~

~~Ou seja, $x\wedge i=x$.~~

~~Logo $x\wedge i\in I$.~~

~~Caso $i\leq x$:~~

~~Ou seja, $i\wedge x=i$.~~

~~Ou seja, $x\wedge i=i$.~~

~~Como $i\in I$, então $x\wedge i\in I$.~~

... CASO CONTRÁRIO?

Parte ($\Leftarrow$):

Suponha I a-ideal.

Parte I fechado para baixo:

Sejam $x\in L$ e $i\in I$ t.q. $x\leq i$. --ALVO: $x\in I$

Logo $x\wedge i=x$.

~~Como~~ Logo $x\wedge i\in I$. [I a-ideal]

Logo $x\in I$.

Parte ($\vee$)-fechado:

Sejam $i, j\in I$. --ALVO: $i\vee j\in I$.

Separo em casos.

Caso $i\leq j$:

Temos $i\vee j=j$.

Como $j\in I$, então $i\vee j\in I$.

Caso $j\leq i$:

Similar.

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

Definição.

Sejam L reticulado e F subconjunto habitado de L.

F filtro $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x\in L)(\forall f\in F)[x\vee f\in F]$

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L\setminus J$ filtro.

Resposta.

Parte ($\Rightarrow$):

Suponha J ideal primo.

Sejam $x\in L$ e $f\in L\setminus J$.

Ou seja, $f\in L$ e $f\notin J$.

-- ALVO: $x\vee f\in L\setminus J$.

desnecessário

Parte $x\vee f\in L$:

Imediato. [L ($\vee$)-fechado]

Parte $x\vee f\notin J$:

Suponha $x\vee f\in J$.

Logo, $f\wedge(x\vee f)\in J$. [J ideal]

Logo $f\in J$. [absorção]

Contradição.

Parte ($\Leftarrow$):

Suponha $L\setminus J$ filtro.

Sejam $a,b\in L$ t.q. $a\wedge b\in J$. --ALVO: $a\in J$ ou $b\in J$

~~(Parte J ideal)~~

~~(Sejam $x\in L$)~~

~~(Logo $a\vee b\in J$. [J ideal])~~

~~(Logo, $a\leq a\wedge b \Rightarrow a\in J$.)~~

~~Como~~

Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais.
RESPOSTA.

Seja J ideal de M.
--ALVO: $\varphi^{-1}[J]$ é ideal de $L \Leftrightarrow (\forall x \in L)(\forall i \in \varphi^{-1}[J])[x \wedge i \in \varphi^{-1}[J]]$
Sejam $x \in L$ e $i \in \varphi^{-1}[J]$.
Ou seja, $\varphi i \in J$.
--ALVO: $x \wedge i \in \varphi^{-1}[J] \Leftrightarrow \varphi(x \wedge i) \in J$.
Como $\varphi x \in M$ [φ $\boxed{\text{homo}}$], então $(\varphi x) \wedge (\varphi i) \in J$. [$J$ ideal]
Como $(\varphi x) \wedge (\varphi i) = \varphi(x \wedge i)$ [φ homo], então $\varphi(x \wedge i) \in J$.

tem a ver com homo isso?

(16) **I5.** Se φ ~~sobre~~jetivo, então φ preserve os ideais.
RESPOSTA.

Seja I ideal de L.
Sejam $x \in M$ e $i \in \varphi[I]$. --ALVO: $(\forall x \in M)(\forall i \in \varphi[I])[x \wedge i \in \varphi[I]]$
Logo seja l t.q. $\varphi l = i$. --ALVO: $(\exists k \in L)[\varphi k = x \wedge i]$
Escolho $\boxed{\varphi^{-1} x} \wedge l$. [$\varphi$ sobre]
Calc.: $\varphi(\varphi^{-1} x \wedge l)$
$= (\varphi\varphi^{-1} x) \wedge \varphi l$
$= x \wedge i$.

não há $\varphi^{-1} : L \leftarrow M$ aqui
cuidado, pois tua idéia tá correta,
mas o que tu escreveu não é.
A prop $\boxed{\varphi \text{ sobre}}$ é um existencial.
Basta usá-lo para obter um $l_x \in L$
t.q. $l_x \xmapsto{\varphi} x$.

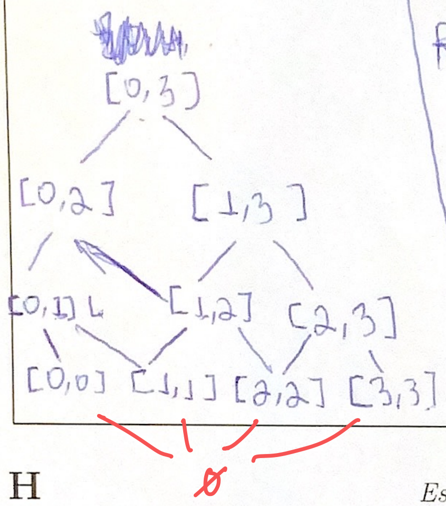
Só isso mesmo.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO.

Hasse:



X Demonstração:

~~[illegible]~~

$K(4) \subset P4$: ← ninguém merece

Seja i tq $i \in K(4)$

Logo $i \subset 4$

Logo $i \in P4$, pela def de P

$K4$ é lattice:

Observando o ~~[illegible]~~ diagrama vemos que não há conflitos para $(\vee)$, $(\wedge)$ e para qualquer dois membros podemos definir seu $(\vee)$ $(\wedge)$

(32) **H**

Escolha uma das **H1**, **H2**.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$
RESOLUÇÃO DA H2 .

X

Sejam d, a, b

Seja $h1 = d \wedge (a \vee b)$ X

Seja $h2 = (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$ X — Alvo: $h1 > h2$

como esses novos nomes ajudam?!

Como $d > d \wedge a$ e $d > d \wedge b$, Logo $d > h2$

Como $a \vee b > a$ e $a > d \wedge a$, Logo $a \vee b > d \wedge a$

Como $a \vee b > b$ e $b > d \wedge b$, Logo $a \vee b > d \wedge b$

Logo $a \vee b > h2$ ✓

Como ~~[illegible]~~ $h2 < d$ e $h2 \leq a \vee b$, Logo $h1 > h2$

Cuidado: $(\leq)$ e $(\geq)$ aqui!

tu trocou para $(<)$ e $(>)$ que tá errado!

isso se chama poluição do escopo [e é crime ambiental]

Pontuação!! ← é obrigatório!
(correta)

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para baixo e } (\vee)\text{-fechado};$$

$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)(\forall i \in I)[\, x \wedge i \in I \,].$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

DEMONSTRAÇÃO.

$(\rightarrow)$

Suponha ~~Seja I tq~~ I o-ideal

Seja $x \in L$ e $i \in I$

Temos que $x \wedge i \leq i$

Como I é fechado para baixo, logo $x \wedge i \in I$

$(\leftarrow)$

Seja I tq a-ideal

Parte fechado para baixo

Seja $i \in I$

seja $l \in L$; suponha $l \leq i$

temos que $l \wedge i \in I$

como $l \leq i$, logo $l \wedge i = l$

logo $l \in I$

Parte $(\vee)$-fechado:

chegou do nada

Temos que $(i \vee i') \wedge i \in I$ [a-ideal]

Como $(i \vee i') \geq i$, logo $(i \vee i') \wedge i = \boxed{(i \vee i')}$; logo $(i \vee i') \in I$

i

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

DEFINIÇÃO.

contexto!!

I o-ideal-dual $\overset{\text{def}}{\iff}$ I fechado para cima e $(\wedge)$-fechado

& habitado!

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L \setminus J$ filtro.

RESPOSTA.

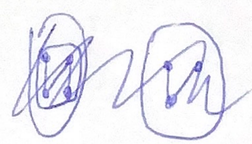
Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais.
Resposta.

Seja $m \in$ ideal ??!! XX
Seja $l \in L$
Seja $i \in \varphi^{-1}[m]$ -- Então $l \wedge i \in \varphi^{-1}[m]$
~~[illegible]~~ Temos que $\varphi(i \wedge l) = \varphi(i) \wedge \varphi(l)$
Como $i \in \varphi^{-1}[m]$, Logo $\varphi(i) \in m$
Aplico a def de m é ideal em $\varphi(i)$ e $\varphi(l)$, para obter $\varphi(i) \wedge \varphi(l)$ é ideal
✓
Obfuscado nessa escrita!

(16) **I5.** Se φ ___ jetivo, então φ preserve os ideais.
Resposta. Sobre ✓

Seja I ideal em L ✓
Vou demonstrar que $\varphi[I]$ é um ideal ✓
Seja $i \in \varphi[I]$ e $m \in M$ ✓
Seja l' tq $\varphi l' = i \wedge m$ (bugou)
~~[illegible]~~



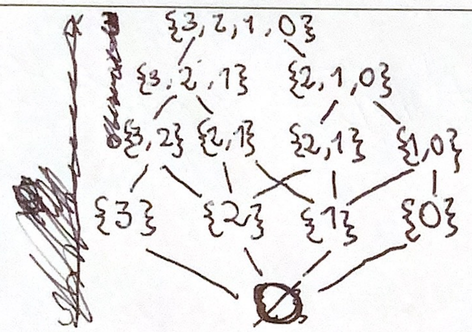
Só isso mesmo.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO. Desculpa pelo português excessivo para isso :-(

nem foi (tanto) :)



Refutar:

No $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$, o $\{3\} \vee \{0\} = \{3,2,1,0\}$ pelo diagrama Hasse.

Como $\{3\}$ e $\{0\}$ são subconjuntos do $|4|$, eles pertencem ao $\wp 4$.

No entanto, no $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$, $\{3\} \vee \{0\} = \{3,0\}$

(32) **H** *Escolha uma das* **H1**, **H2**.

L: Lattice

H1. $a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \wedge x) \vee b$

H2. $d \wedge (a \vee b) \ge (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$

RESOLUÇÃO DA H1.

Sejam $a, b \in L$ t.q. $a \le b$. H1 | Seja $x \in L$.

Basta demonstrar que $a \le (a \wedge x) \vee b$ & $x \wedge b \le (a \wedge x) \vee b$.

Parte $a \le (a \wedge x) \vee b$:

Como $b \le (a \wedge x) \vee b$ pelo ($\vee$)-ub-L, então $a \le (a \wedge x) \vee b$ pela H1 e pela ($\le$)-trans.

Parte $x \wedge b \le (a \wedge x) \vee b$

Como $b \le (a \wedge x) \vee b$ pelo ($\vee$)-ub-L. e $x \wedge b \le b$ pelo ($\wedge$)-lb-L,

então $x \wedge b \le (a \wedge x) \vee b$ pelo ($\le$)-trans.

Yikes

no more «basta"? :(

daqui foi!

Que tal:

Calc: $a \le b$ [..]

$\le (a \wedge x) \vee b$ [..]

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para baixo e } (\vee)\text{-fechado};$$
$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)\,(\forall i \in I)\,[\,x \wedge i \in I\,].$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte $\Rightarrow$:
Seja I o-ideal.
Sejam $x \in L$ e $i \in I$.
Logo, $x \wedge i \leq i$ pelo $(\wedge)$-l.b.-R.
Logo, $x \wedge i \in I$ pelo I fechado para baixo.

Parte $(\vee)$-fechado:
Seja $x \in I$ e $y \in I$.
~~[illegible]~~
~~[illegible]~~

Parte $\Leftarrow$:
Seja I a-ideal.
Parte fechado para baixo:
Sejam $x \in L$ e $i \in I$ t.q. $x \leq i$. Logo $x \wedge i = x$.
~~[illegible]~~
Como $x \leq i$ e $x \leq x$, então $x \leq x \wedge i$. ?!?
Como $x \wedge i \leq x$ pela $(\wedge)$-l.b.-L e $x \leq x \wedge i$, então $x = x \wedge i$ pela $(\leq)$-anti. ??
Logo $x \in I$ pela I a-ideal.

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

DEFINIÇÃO.

$(\exists x \in L)(\exists i \in I)[x \wedge i \notin I]$ ← isso é nem-Prop (pois nem compila)

Contexto! Palavras! Comandos!
dualizamos o poset, não a lógica!!

(16) **I3.** Seja J ideal de L.
J ideal primo $\iff$ $L \setminus J$ filtro.

RESPOSTA.

Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais. $(\forall J \trianglelefteq M)[\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq L]$

RESPOSTA.

nome ruim!

Seja $J \trianglelefteq M$

Seja $x \in L$ e $j \in \varphi^{-1}[J]$

Basta demonstrar que $x \wedge j \in \varphi^{-1}[J]$.

Como $x \wedge j \leq j$ pelo $(\wedge)$-l.b.-L, então $\varphi(x \wedge j) \leq \varphi j$ pela φ homo (preserva ordem).

Como $j \in \varphi^{-1}[J]$, então $\varphi j \in J$.

Logo, $\varphi(x \wedge j) \in J$ pela $J \trianglelefteq M$ (fechado por baixo).

Logo, $x \wedge j \in \varphi^{-1}[J]$.

(16) **I5.** Se φ ~~in~~ jetivo, então φ preserve os ideais.

RESPOSTA. (por quê?)

Seja φ injetivo.

Seja $I \trianglelefteq L$.

Seja $x \in M$ e $i \in \varphi[I]$.

Basta demonstrar que $x \wedge i \in \varphi[I]$

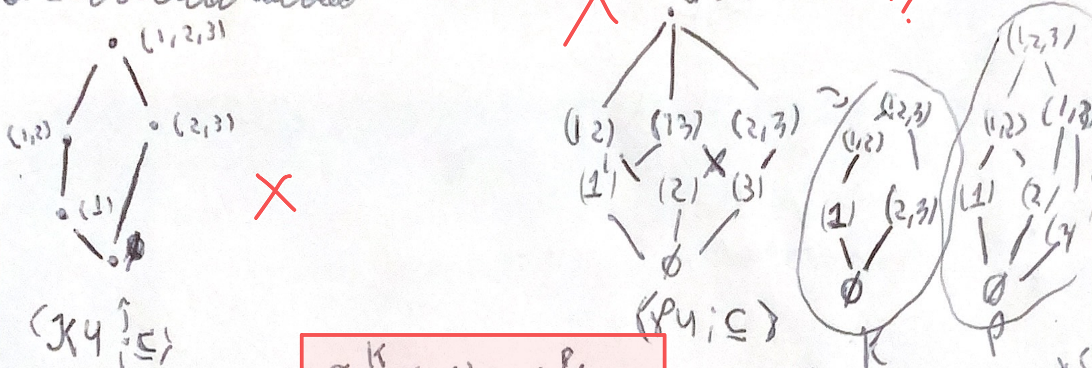
Seja $j \in I$ t.q. $\varphi j = i$

Só isso mesmo.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/<u>refute</u>: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO.



Como $\emptyset \overset{K}{—} (2,3)$ e $\emptyset \overset{P}{\not—} (2,3)$, $\langle K4; \subseteq \rangle$ não é sublattice de $\langle P4; \subseteq \rangle$.

→ não dá para entender notação improvisada/inventada.

Quis dizer $(-\!\!<)$?

(mas no $a - b - c$ o $\{a, c\}$ é sublattice sim).

(32) **H** *Escolha uma das* **H1**, **H2**.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$
RESOLUÇÃO DA <u>H2</u> .

Basta mostrar que $d \wedge a \leq d \wedge (a \vee b)$ e $d \wedge b \leq d \wedge (a \vee b)$

Parte $d \wedge a \leq d \wedge (a \vee b)$

Basta mostrar que $d \wedge a \leq d$ e $d \wedge a \leq a \vee b$.

Parte $d \wedge a \leq d$:

~~basta mostrar que $d \vee (d \wedge a) = d$.~~

, imediato ~~[absorção d]~~

Parte $d \wedge a \leq a \vee b$

basta mostrar que $(a \vee b) \vee (d \wedge a) = a \vee b$

Calc: $(a \vee b) \vee (d \wedge a) = (b \vee a) \vee (d \wedge a)$ [(∨)-comm]
$= b \vee (a \vee (d \wedge a))$ [(∨)-assoc]
$= b \vee a$ [(∨)(∧)-absorção]
$= a \vee b$. [(∨)-comm]

imediato.

Parte $d \wedge b \leq d \wedge (a \vee b)$

similar.

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para baixo e } (\vee)\text{-fechado;}$$

$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)\,(\forall i \in I)\,[\,x \wedge i \in I\,]\,.$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

Demonstração.

nem parece um ℓ aqui!

bugou. Isso é uso de algo? ..pois ataque, não é.

$\Rightarrow$): Suponho I o-ideal.

Sejam $x \in L$ e $i \in I$.

Caso $x \leq i$:

logo, $x \in I$ [I fechado para baixo]

~~logo $(x \vee i) \wedge x \in I$~~ [$\Leftarrow x$ absorção]

Como $x = x \vee (x \wedge i)$, logo $x \vee (x \wedge i) \in I$

logo $x \wedge i \in I$ [I $(\vee)$-fechado]

Caso contrário:

logo, $i \vee x = i$ [$i \geq x$] NÃO!!

logo $i \vee x \in I$

logo $x \in I$ [I $(\vee)$-fechado] similar ao Caso 1.

$\Leftarrow$): ~~Suponho I a-ideal.~~

$\boxed{\text{Sejam } x \in L \text{ e } i \in I \text{ t.q. } x \wedge i \in I}$ x

Parte $(\vee)$-fechado: Alvo?

Como $I \subseteq L$ e L reticulado, então $x \vee i \in L$.

~~$(x \vee i) \wedge i$~~ [absorção]

Como? i?? $\wedge (x \vee i) = i$, então $i \wedge (x \vee i) \in I$.

logo $x \vee i \in I$.

Parte I fechado para baixo:

Suponho que $x \leq i$.

Como $i \wedge x \in I$ e $i \wedge x = x$, $x \in I$.

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de $\boxed{\text{filtro}}$).

Definição.

I $\boxed{\text{o-ideal}}$? $\overset{\text{def}}{\iff}$ I fechado para cima e $(\wedge)$-fechado.

Contexto! (hab.)

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L \setminus I$ filtro.

Resposta.

Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais.
RESPOSTA.

(Rascunho serve pra quê?)
Also: Teu rascunho é 80 vezes mais legível!!

~~Seja I ... ideal de M~~ ... Def. $(\forall x \in M)(\forall a \in f[I])[x \wedge a \in I]$
~~Suponha $x \in M$ e $y \in f[I]$~~ Parte (V)-fechado
~~Sejam ... ideal de M e $x \in L$.~~
~~Sejam $a \in f^{-1}[I]$ e $x \in L$~~ ... $f^{-1}(I)$ ... logo, como L reticulado, $x \vee m \in L$
Como $a \in f^{-1}[M]$, seja l tq $f(l) = m$.
~~Logo ... $x \in L$~~
~~Logo, $f(l \wedge x) \in M$,~~
~~...~~ logo, f
~~... $\in M$, ... $\in f^{-1}[I]$ ... $x \wedge x \in$~~

(16) **I5.** Se φ ~~sobre~~jetivo, então φ preserve os ideais.
RESPOSTA.

matemática é case sensitive!!

não dá para ler isso!

Suponha f sobre
Seja $I \trianglelefteq L$. Parte (V)-fechado.
Seja $B \in M$ --quem se importa com eles?
Como f sobre, seja $a \in I$ tq $f(a) = b$ e $f(a') = b'$
Como I ideal, $a \vee a' \in I$.
logo, $f(a \vee a') \in f[I]$
logo, $f(a) \vee f(a') \in f[I]$. [f homomorfismo]
logo, $b \vee b' \in f[I]$. [h']
Como $f[I] \subseteq M$, logo, $b \vee b' \in M$.

Parte fechado para baixo:
Seja $a, a' \in I$ e $a' \in L$ tq $a \leq a'$.
logo, $f(a) \leq f(a')$ [homo]
Como f sobre, seja b, b' tq $f(a) = b$ e $f(a') = b'$
logo, $b \leq b'$.
logo $f[I]$ fechado para baixo.

Parte (V)-fechado Quem?!
Seja $J \trianglelefteq M$
Sejam $\boxed{a, x} \in f^{-1}[J]$. ?!
logo, sejam l e y tq $f(a) = l$ e $f(x) = y$
Como L reticulado, $a \vee x \in L$
logo, ~~...~~ $f(a \vee x) \in M$ [$f(a) \vee f(x)$ e f homo]
logo $x \vee a \in f^{-1}[J]$

escolha ruim de nomes!

Parte fechado para baixo
Sejam $x, y \in f^{-1}[J]$ e $y \in M$
logo,

Só isso mesmo.

Não dá.
(Depois de ter gastado nesta prova o mesmo tempo que gastei para corrigir todas as anteriores, desisto. :-(

3
2
1
0

K(4) membros

{0} {1} {2} {3}

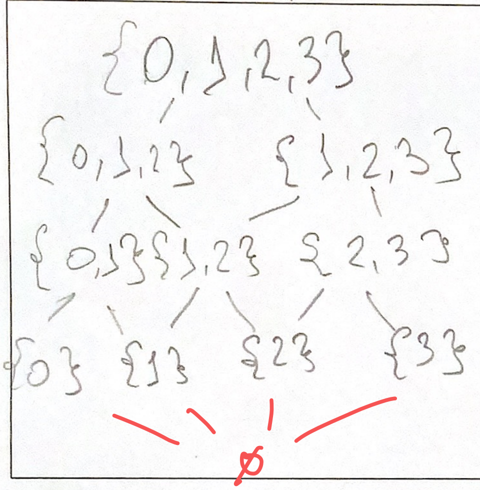
{0,1} {0,1,2} {0,1,2,3}

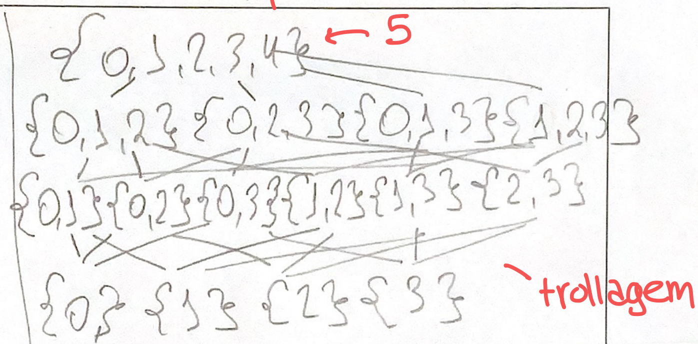
{1,2} {1,2,3} {2,3}

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO. K4 P4 pra que tentar desenhar isso?!!





Não é um sublattice, pois o join dos {0} e {2} no K4 é o {0,1,2}, em P4 é o {0,2}

(32) **H** (membros de um lattice) *Escolha **uma** das* **H1**, **H2**. Demonstração

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$

RESOLUÇÃO DA H1.

Suponha $a \leq b$ (h1)

Basta demonstrar que $a \leq (a \wedge x) \vee b$ (i)

$(x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$ (ii) ✓

Parte i:

-- $a \vee ((a \wedge x) \vee b) = (a \wedge x) \vee b$

Calculamos

$a \vee ((a \wedge x) \vee b)$

$= a \vee (b \vee (a \wedge x))$ [comm ∨]

$= (a \vee b) \vee (a \wedge x)$ [assoc ∨]

$= b \vee (a \wedge x)$ [h1]

$= (a \wedge x) \vee b$ [comm ∨]

✓

Parte ii

-- $(x \wedge b) \wedge ((a \wedge x) \vee b) = (x \wedge b)$

Calculamos:

$(x \wedge b) \wedge ((a \wedge x) \vee b)$ [comm ∧] ✗

$= x \wedge (b \wedge ((a \wedge x) \vee b))$

$= x \wedge b$ [absorção b]

✓

(64) **I**

D é Downset de L

$\overset{def.}{\iff}$ $D \subseteq L$

$(\forall d : D)(\forall l : L)[l \leq d \Rightarrow l \in D]$

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para baixo e } (\vee)\text{-fechado};$$

downset

$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)(\forall i \in I)[x \wedge i \in I].$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte I o-ideal => I a-ideal

Suponha I o-ideal --alvo: $(\forall x \in L)(\forall i \in I)(x \wedge i \in I)$.

Sejam $x : L$ e $i \in I$ --alvo: $x \wedge i \in I$

Por definição, $x \wedge i \leq x$ e $x \wedge i \leq i$. Como I é fechado para baixo,

e $x \wedge i \leq i$, então $x \wedge i \in I$.

Parte I a-ideal => I o-ideal --alvo I downset e I ($\vee$-fechado)

Parte I downset --$(\forall i : I)(\forall l : L)[l \leq i \Rightarrow l \in I]$

Sejam $i : I$ e $l : L$. Suponha $l \leq i$ --alvo $l \in I$

Como $l \leq i$, $l \wedge i = l$, por definição de meet.

Como $l \wedge i \in I$, logo l ~~também~~ pertence a I.

Parte ($\vee$)-fechado. Sejam $a, b \in I$. Basta demonstrar que $a \vee b \in I$.

Temos que $a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)

Temos que $a \in I$ e $a \vee b \in L$

Logo, temos que $a \vee b$ também pertence a I

socorro!

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

DEFINIÇÃO.

F o-filtro $\overset{def}{\iff}$ F fechado para cima e $(\wedge)$-fechado

F a-filtro $\overset{def}{\iff}$ $(\forall x \in L)(\forall f \in F)[x \vee f \in F]$

U fechado para cima $\overset{def}{\iff}$ $(\forall u : U)(\forall l : L)[l \geq u \Rightarrow l \in U]$

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L \setminus J$ filtro.

Contexto! (habitado!)

RESPOSTA.

\

Parte J ideal primo => L/I filtro

Suponha J ideal primo --alvo ... L/I filtro

Sejam $a, b \in L$ tal que $a \wedge b \in J$ ← esse comando é pra ser o quê?

caso $a \in J$.

Seja f t.q. $f \notin J$, ou seja, tal que para todo $i \in J$, $f > i$.

Basta provar que $a \vee f \in f$.

Como por definição, $f > i \Rightarrow a \vee f = f$, imediato.

caso $b \in J$: similar.

Parte L/J filtro => J ideal primo

Sejam $a, b \in L$. Suponha que $a \wedge b \in J$.

Basta provar que $a \in J$ ou $b \in J$

Pela antissimetria do $\leq$, divido em 3 casos: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

e pela definição de ...

confundiu com tricotomia.

caso $a = b$. Como $a = b$, então $a \wedge b = a$. Logo $a \in I$

Caso $a < b$. Então $b > a \wedge b$. Logo $b \in L/J$. Como I Ideal e $a \leq a \wedge b$, então $a \in I$.

Caso $b < a$: similar

habitado
downset
($\vee$) fechado

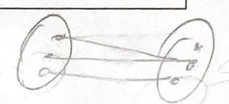
Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais.
RESPOSTA.

--alvo $(\forall J \trianglelefteq M)(\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq L)$
Seja J ideal de M
Parte habitado
Como $\varphi^{-1}[J]$ é homomorfismo e J é habitado, $\varphi^{-1}[J]$ também é habitado. Por quê? ✗
Parte downset
Seja $k \in \varphi^{-1}[J]$ e seja $l \in L$ --alvo: $l \leq k \Rightarrow l \in \varphi^{-1}[J]$
Suponha $l \leq k$
Como φ homo, $\varphi l \leq \varphi k$. Como $\varphi k \in J$ ideal, $\varphi l \in J$. Logo $l \in \varphi^{-1}[J]$ ✓
Parte ($\vee$) fechado
Sejam $a, b \in \varphi^{-1}[J]$ --alvo: $a \vee b \in \varphi^{-1}[J]$
pulou
Como φa e $\varphi b \in J$ ideal, $\varphi(a \vee b) \in J$ ideal. Logo $a \vee b \in \varphi^{-1}[J]$ ▷(pois ideal $\Rightarrow$ ($\vee$)-fechado)

(16) **I5.** Se φ sobrejetivo, então φ preserve os ideais. ✓
RESPOSTA.

injetiva $\overset{def}{\iff}$ $fx = fy \Rightarrow x = y$
sobrejetiva $\overset{def}{\iff}$ $(\forall b)(\exists a)[b = fa]$



Seja φ sobretiva
Seja I ideal de L --alvo $\varphi[I] \trianglelefteq M$
--Leia-se: $f = \varphi$, confundi e percebi depois!!!
(gregofobia!)
$\varphi[i]$ habitado
Como φ função, imediato pois I ideal, logo habitado ✓
$\varphi[i]$ downset
Seja $\boxed{k \in \varphi[i]}$ e $m \in M$.
Suponha $m \leq k$ --alvo $m \in \varphi[i]$
inútil. (Por quê?)
útil
Como φ é sobrejetiva, existe a_k t.q. $\varphi a_k = k$ e a_m t.q. $\varphi a_m = m$.
~~Sejam a_m e a_k t.q. $\varphi a_k = k$ e $\varphi a_m = m$.~~
Como φ é homomorfismo, $a_m \leq a_k$. ✓
Como $a_m \in I$ ideal, então $a_k \in i$. ✗
Logo, $f a_k$, ou seja, $\boxed{k \in \varphi[i]}$
que tal usar esse dado logo?
Parte $\varphi[i]$ ($\vee$) fechado
Sejam $\boxed{a, b \in \varphi[i]}$ --alvo: $a \vee b \in \varphi[i]$.
Como φ sobre, sejam m, n tais que $fm = a$ e $fn = b$ Grr...

Só isso mesmo.

Como $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$ e φ homo, então $m \leq m \vee n$ e $n \leq m \vee n$. Como $a, b \in \varphi[i]$, então m e $n \in I$. ✗ Como I ideal, $m \vee n \in I$. Como φ homo, então $\varphi(m \vee n) \in \varphi[i]$. Sabemos que $\varphi m \vee \varphi n = \varphi(m \vee n)$ pois φ homo.
nope!

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO.

fechado (mas não é)

K4
- {0,1,2,3}
- {0,1,2}
- {0,1} X
- {0}
- {}

Basta que K4 ~~resp.~~ T, ⊥ e resp ∧ e ∨ binários.

Parte T, ⊥:
Bottom de K4 = {}, Top = {0,1,2,3}.
logo resp T, ⊥.

Parte Joins e meets:
no K4 se $a \subseteq b$, então $a \wedge b = a$
e $a \vee b = b$.
O mesmo ocorre no P4.

(32) **H** *Escolha uma das* **H1**, **H2**.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$
} Lattice/Reticulado

RESOLUÇÃO DA H1.

Suponha $a \leq b$ ✓
basta demonstrar $a \vee (x \wedge b) \leq a \wedge x$ & $a \vee (b \wedge x) \leq b$ X

Parte ~~$a \vee (x \wedge b) \leq a \wedge x$~~ $a \vee (x \wedge b) \leq b$
basta demonstrar $a \leq b$ & $x \wedge b \leq b$.

Parte $a \leq b$:
imediato

Parte $x \wedge b \leq b$:
imediato. $[(\forall a)[a \wedge b \leq b]]$

Parte $a \vee (x \wedge b) \leq a \wedge x$:
separo em casos a partir de $a \wedge x$ XX

caso $a \wedge x = a$:
~~basta demonstrar $a \leq a \wedge x$ & $x \wedge b \leq a \wedge x$~~

Parte $a \leq a \wedge x$:
logo basta demonstrar $a \leq a$. $[a \wedge x = a]$
imediato.

Parte $x \wedge b \leq a \wedge x$:
logo basta demonstrar $x \wedge b \leq a$

Parte $b \leq a$:
contradição.

~~logo $a \wedge x = x$.~~
logo $a \wedge x$ só pode ser x

caso $a \wedge x = x$:

Parte $a \vee (x \wedge b) \leq a \wedge x$
como $a \wedge x = x$
basta demonstrar
$a \vee (x \wedge b) \leq x$
basta demonstra $a \leq x$
e $x \wedge b \leq x$

Parte $a \leq x$:
como $a \wedge x = x$, então $a \leq x$.

Parte $x \wedge b \leq x$:
imediato. $[(\forall a)[a \wedge b \leq b]]$

(64) **I**

$(\forall i \in I)(\forall p \leq i)[p \in I]$

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para paixo e } (\vee)\text{-fechado};$$
$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)(\forall i \in I)[x \wedge i \in I].$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

Demonstração.

$(\Longrightarrow)$:

Suponha I o-ideal

Seja $x \in L$.

Seja $i \in I$

temos que $x \wedge i \leq i$

Como I ideal e $x \wedge i \leq i$, então $x \wedge i \in I$.

$(\Longleftarrow)$:

Seja I a-ideal

Seja $i \in I$.

Seja $p \leq i$.

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

Definição.

F filtro $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)(\exists f \in F)[x \wedge i \notin F]$

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L \setminus I$ filtro.

Resposta.

Sorry :(

Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais.
RESPOSTA.

Seja $J \trianglelefteq M$

Sorry ¨⌢

(16) **I5.** Se φ ______ jetivo, então φ preserve os ideais.
RESPOSTA.

Sorry ¨⌢

Só isso mesmo.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

Resolução.

(32) **H** *Escolha uma das* **H1**, **H2**.

H1. $a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \ge (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$
Resolução da H1 .

Demonstração: Temos que $a \le b$, no caso de $a = b$, não sabemos os tamanhos de $(x \wedge b)$ e $(a \wedge x)$, ou seja, se $(x \wedge b) > (a \wedge x)$, essa afirmativa não estaria correta. Pois, nesse cenário estamos considerando que $a = b$, então se $(x \wedge b) > (a \wedge x)$, teríamos $a \vee (x \wedge b) > (a \wedge x) \vee b$.

Exemplo:

$a = (2, 3, 6, 8)$
$b = (4, 7, 10, 12)$
$x = (2, 4, 12, 22)$
$(x \wedge b) = (4, 12)$
$(a \wedge x) = (2)$

Dessa forma, nós temos que $((x \wedge b) = (4, 12)) > ((a \wedge x) = (2))$.
E como $a = b$, podemos chegar a conclusão que $a \vee (x \wedge b) > (a \wedge x) \vee b$.

nenhum contato com a disciplina.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO.

(32) **H** *Escolha* ***uma*** *das* **H1**, **H2**.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$

~~RESOLUÇÃO~~ Demonstração DA H1.

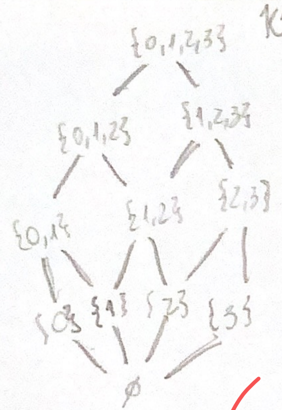
abuso de gerúndio

~~Considere~~ Tendo que $a \leq b$ e um x arbitrário qualquer. Tem-se
$a \leq b$, $a \leq (a \wedge x)$, $(x \wedge b) \leq (a \wedge x)$, $(x \wedge b) \leq b$

(32) **K**

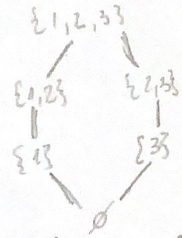
Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO.



$\mathcal{K}4 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$

Não é sublattice pois $\{1,2\}$ e $\{2,3\}$, no possível sublattice:



não terá o glb do lattice original, que seria $\{2\}$.

(32) **H** *Escolha* ***uma*** *das* **H1**, **H2**.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$
H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$
RESOLUÇÃO DA H2.

Basta demonstrar $d \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$ e $(a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$.
Parte L:
- Basta que $d \geq (d \wedge a)$ e $d \geq (d \wedge b)$.
- Parte L:
  - Basta que $(d \wedge a) \vee d = d$.
  - Imediato pela comutatividade e absorção.
- Parte R:
  - Similar.

Parte R:
- Basta que $(a \vee b) \geq (d \wedge a)$ e $(a \vee b) \geq (d \wedge b)$.
- Parte L:
  - Basta que $(d \wedge a) \wedge (a \vee b) = d \wedge a$.
  - Calc.: $(d \wedge a) \wedge (a \vee b) = d \wedge (a \wedge (a \vee b))$ [assoc.]
    $= d \wedge a$. [absorção]
- Parte R:
  - Similar.

tua indentação bugou.

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para baixo e } (\vee)\text{-fechado;}$$

$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)\,(\forall i \in I)\,[\,x \wedge i \in I\,]\,.$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

Demonstração.

($\Rightarrow$): Suponha I o-ideal.
Seja $\bot$ bottom de I. (tem?)
Logo $\bot$ é bottom de L. [$I \subseteq L$] ??
Sejam $x \in L$ e $i \in I$.

($\Leftarrow$): Suponha I a-ideal
Sejam $x, y \in I$.
Logo $x \in L$. [$I \subseteq L$]
Logo $x \wedge y \in I$. [a-ideal]

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

Definição.

I fechado para cima e $(\wedge)$-fechado.

ctx! hab!

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L \setminus J$ filtro.

Resposta.

($\Rightarrow$): Suponha J ideal primo.

Sejam $\varphi : L \to M$ homomorfismo de reticulados.

(16) **I4.** φ reflete os ideais.
RESPOSTA.

Seja $J \trianglelefteq M$.
Basta que $\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq L$.
$\varphi^{-1}[J] \leq L$: ??
$\varphi^{-1}[J]$ lab:

(16) **I5.** Se φ bi jetivo, então φ preserve os ideais.
RESPOSTA.

!

Só isso mesmo.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

RESOLUÇÃO.

$\wedge$

(32) **H** *Escolha uma das* **H1**, **H2**.

$a \leq b$

$a \vee b = b$

$a \wedge b = a$

Membros de uma Lattice

$\boxed{\textbf{H1.}}$ $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$

H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$

RESOLUÇÃO DA H2 .

X

Sejam a, b, x t.q $a \leq b$

bugou

Basta demonstrar que $a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x)$ & $a \vee (x \wedge b) \leq b$ X

Parte $a \vee (x \wedge b) \leq a \wedge x$

Basta demonstrar $a \leq a \wedge x$ & $x \wedge b \leq a \wedge x$

Parte $a \leq a \wedge x$

$a \vee (a \wedge x) = a$ [a-abs]

Parte $(x \wedge b) \leq (a \wedge x)$

$(x \wedge b) \vee (a \wedge x) = (b \wedge x) \vee (x \wedge a)$ [$\wedge$-com]

$= b \wedge (x \vee (x \wedge a))$

$= b \wedge x$

Parte $a \vee (x \wedge b) \leq b$

Basta demonstrar $a \leq b$ & $x \wedge b \leq b$

Parte $a \leq b$

Imediato

Parte $x \wedge b \leq b$

$(x \wedge b) \vee b = b$ [b-abs]

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para paixo e } (\vee)\text{-fechado;}$$

$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)\,(\forall i \in I)\,\boxed{[\,x \wedge i \in I\,].}$$

$\wedge_L \; \forall \cdot 0$

absorve para aquele ideal

$a \equiv b$

$a \vee b = b$

$a \wedge b = a$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

DEMONSTRAÇÃO.

(⇒): Suponha I o-ideal

Sejam $x \in L$ e $i \in I$

$x \wedge i \in J$

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

DEFINIÇÃO.

Quando tiramos os elemento de L que não pertencem ao ideal. Tira o "lixo" de L, ou seja, o que não está no ideal.

(não faz sentido. Nem parece definição.)

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

tira o "lixo"

J ideal primo $\iff$ $L \setminus J$ filtro. $(\forall a, b \in L)\,[\,a \wedge b \in I \Rightarrow \underbrace{a \in I \text{ ou } b \in I}_{\text{nova}}\,]$

RESPOSTA.

(⇐): Suponha L/J filtro

Sejam $a, b \in L$ t.q. $a \wedge b \in I$

Como L/J filtro, então $a \in J$ e $b \in I$.

X

$l \le j$
$l \vee j = j$
$l \wedge j = l$

Sejam $\varphi : L \to M$ $\boxed{\text{homomorfismo}}$ de reticulados.

hom

(16) **I4.** φ reflete os ideais. $(\forall J \trianglelefteq M)[\varphi^{-1}[J] \trianglelefteq L]$
RESPOSTA.

-- $l \in \varphi^{-1}[J]$! -- $(\forall l, j \in J)[l \vee j \in J]$

Seja J ideal de M

-- Parte $\varphi^{-1}[J]$ é downset

Seja $j \in \varphi^{-1}[J]$ e $l \in L$ t.q. $l \le j$

-- Parte $(\vee)$-fechado

Sejam $l, j \in \varphi^{-1}[J]$

Alvo: $l \vee j \in \varphi^{-1}[J]$

(16) **I5.** Se φ ~~sobre~~jetivo, então φ preserve os ideais. $(\forall I \trianglelefteq L)[\varphi[I] \trianglelefteq M]$
RESPOSTA.

Seja I ideal de L

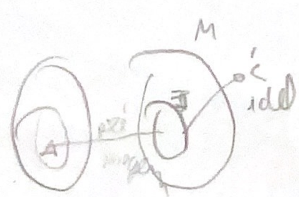
com $f(l) \le f(j)$ $\} \in J$

$\{ a \in J \}$

$\varphi(l) \le \varphi(j)$

ideal

$\{ x \mid x \in J$



$\varphi(l) \in \varphi^{-1}[J]$

alvo

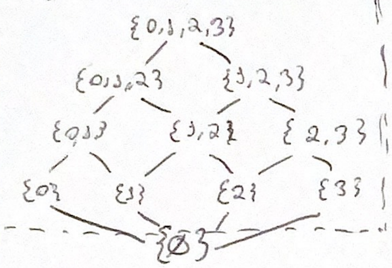
Só isso mesmo.

(32) **K**

Desenhe o diagrama Hasse de $\mathcal{K}4$ e demonstre/refute: $\langle \mathcal{K}4; \subseteq \rangle$ é um sublattice de $\langle \wp 4; \subseteq \rangle$.

Resolução.

Diagrama Hasse de K4:



Todos os membros são subconjuntos de 4 então $K4 \subseteq \wp 4$.
Mostrar que é $\vee$-fechado e $\wedge$-fechado:
Observando o diagrama podemos ver que o K4 é $\vee$ e $\wedge$-fechado

não tem como "observar" o fechado olhando apenas no $\mathcal{K}$.

(32) **H** *Escolha* ***uma*** *das* **H1**, **H2**.

Em um Lattice.

H1. $a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$

H2. $d \wedge (a \vee b) \geq (d \wedge a) \vee (d \wedge b)$

Resolução da ~~H2~~ H1.

Sup $a \leq b$.

Basta demonstrar $a \leq (a \wedge x) \vee b$ (I) e $(x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$ (II)

Parte (I):

Como $b \geq a$ e $(a \wedge x) \vee b \geq b$

Temos $a \leq (a \wedge x) \vee b$ [use "calc"!]

Parte (II):

Como $x \wedge b \leq b$ e $(a \wedge x) \vee b \geq b$

Temos $(x \wedge b) \leq (a \wedge x) \vee b$ ..

∎

(confuso)

(64) **I**

Definições. Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

$$I \text{ o-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} I \text{ fechado para baixo e } (\vee)\text{-fechado;}$$
$$I \text{ a-ideal} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)\,(\forall i \in I)\,[\, x \wedge i \in I \,]\,.$$

Sejam L reticulado e I subconjunto habitado de L.

(8) **I1.** I o-ideal $\iff$ I a-ideal.

DEMONSTRAÇÃO.

(8) **I2.** Defina o conceito dual de ideal (chamamos de filtro).

DEFINIÇÃO.

~~Sejam L reticulado e I a-ideal, def~~. Sejam L reticulado e $\boxed{I \text{ a-ideal de } L}$ ×

~~$I^{\sigma} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)(\forall i \in I)[x \vee$~~ I-dual $\Leftrightarrow I^{\sigma} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in L)(\forall i \in I)[x \vee i \in I^{\sigma}]$

quem?

confundiu.

(16) **I3.** Seja J ideal de L.

J ideal primo $\iff$ $L \setminus J$ filtro.

RESPOSTA.