(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

por quê?

Para estabelecer o isomorfismo Precisa satisfazer as -jetividades. Porém, tome $\alpha := \mathbb{N}$ e $\beta := \mathbb{N}$ e observe que $F(0, 42, 1) \overset{(1)}{=} (0, 1, 0)$ e $F(0, 2, 1) \overset{(2)}{=} (0, 1, 0)$.
Logo F não satisfaz a injetividade, pois, $(1) = (2)$ e $(0, 42, 1) \neq (0, 2, 1)$.

(15) **R** *Escolha* ***uma*** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

($\Rightarrow$):
Por indução no n
Base:
calculamos:
$f^0 x = \mathrm{Id}_A\, x$
$= x$

P.I.:
Calculamos:
$f^{n+1} x = (f \circ f^n) x$ [def f^n]
$= (f \circ f) x$ ✗ [HI]
$= f(fx)$ [$\circ$]
$= fx$ [x fixPoint]
$= x$

qual tua HI mesmo?

($\Leftarrow$):
Para $n := 1$ temos $f^1 x = x$
Logo basta demonstrar que $f = f^1$.
calculamos:
$f^1 x = (f \circ f^0) x$
$= (f \circ \mathrm{Id}_A) x$
$= f(\mathrm{Id}_A x)$
$= fx$

pontinho desnecessário. ✓

(15) **T**

$|f \times g| = \langle f \circ outl, g \circ outr \rangle$

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

Auxiliares

$\Delta_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\Delta_{\mathbb{N}} = \langle \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}, \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \rangle$ ✓

$double : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ✓

$double = (+) \circ \Delta_{\mathbb{N}}$

$f \times g : (\alpha \to \beta) \times (\gamma \to \delta) \to (\alpha \times \gamma) \to (\beta \times \delta)$

$f \times g : \langle f \circ outl, g \circ outr \rangle$ ✓

$Pow3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$Pow3 = (\cdot) \circ \langle square, Id \rangle$ ✓

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f = (+) \circ \underbrace{(Pow3 \times double) \circ \Delta_{\mathbb{N}}}$

os $(\_ \times \_)$ e Δ aqui ajudaram mesmo?

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

DEMONSTRAÇÃO.

pra que serve um novo e não-informativo nome para o objeto já conhecido como $f\,x$???

Parte $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$:

Seja $a \in A$.

Seja $b \in f[A]$ t.q. $fa = b$.

Parte $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$

Seja $u \in f[f^{-1}[B]]$.

⋮

?

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\,(a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

pelo contrário: esse é o único caso não vazio que F serve!

Se considerarmos ~~a~~ α : Unit e β : $\mathbb{N}$, isso não seria possível. Seja $X \in \mathbb{N}$, teríamos:

$$F(*, *, X) = (*, X, *)$$

type error

Ou seja, a F quando aplicado no $*$ gera dois resultados diferentes, o que não é possível. Por isso que a F não serve para estabelecer o isomorfismo.

não oferece nada.

(15) **R**

Escolha ***uma*** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 \\ b(1) &= 1 \\ b(n) &= b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{aligned}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

Não faz sentido. Tu tá usando um $(\exists)$??

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

Parte $(\Rightarrow)$:

Suponho X é um fixpoint do f (1)

Indução no n.

Base:

Vale: $f^0 x = \mathrm{Id}_A\, x$

$= X$

Passo indutivo:

Seja K t.q. $f^K X = X$

Vale: $f^{K+1} x = (f \circ f^K) x$

$= f(f^K x)$

$= f X$ [(H.I)]

$= X$ [(1)]

Parte $(\Leftarrow)$:

Seja $n \in \mathbb{N}$ t.q. X é um fixpoint da f^n. ✗

Logo X é um fixpoint da f^1.

Vou mostrar que $f^1 = f$

Vale: $f^1 = (f \circ f^0) = (f \circ \mathrm{Id}_A)$

$= f(\mathrm{Id}_A)$

$= f$

Logo X é um fixpoint do f.

O que esse n tem a ver com tua resposta? Qual foi a utilidade dele?

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\,x = x^3 + 2x.$$

! !

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

$\Delta : A \to A \times A$

$\Delta x = \langle x, x \rangle$

$\Delta^3 : A \to A \times A \times A$

$\Delta x = \langle x, x, x \rangle$

$\mathrm{Triple} : A \times A \times A \to A$

$\mathrm{Triple}\langle x, x, x \rangle = x^3$

$\mathrm{Double} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (+) \circ \Delta$

$\mathrm{Id} : A \to A$

$\mathrm{Id}\,x = x$

$f = (+) \circ \langle \mathrm{Triple}, \mathrm{Id} \rangle \circ \langle \Delta^3, \mathrm{double} \rangle \circ \Delta$

type error

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $x \in A$.

Seja $b \in B$ t.q $f\,x = b$.

Logo $b \in f[A]$, e logo $f\,x \in f[A]$.

Por definição, temos $y \in f^{-1}[f\,A] = f\,y \in f[A]$.

Como $f\,x \in f[A]$ ... ??

Logo $x \in f^{-1}[f[A]]$.

quem é y?!

nome muito ruim!

Seja $x \in f[f^{-1}[B]]$

Logo seja $b \in f^{-1}[B]$ t.q $f\,b = x$.

Por definição, temos $y \in f^{-1}[B] = f\,y \in B$. ??

Logo $f\,b \in B$.

Como $f\,b = x$ ← ??

Logo $x \in B$.

∎

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

~~$f^{-1}[f\,A]$ é o conjunto de todos os $x \in X$ t.q $x \in f[A]$ e $f[A]$ é o conjunto de todos os $f\,x \in B$ t.q $x \in A$. Ou seja, a condição é que $x \in X$, como nem todo $x \in X$ também pertence ao A, logo A não necessariamente é igual a $f^{-1}[f[A]]$.~~

HANDWAVING TOTAL!

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\,(a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

Escolha α como Nat e β como Unit.
Dessa forma, pelo o caso de $a \neq a'$ o valor de a' é perdido em F e não é possível definir uma função G de forma a devolver o a' qualquer que foi perdido.

muito vago / handwaving

(15) **R** *Escolha **uma** das **R1**, **R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 \\ b(1) &= 1 \\ b(n) &= b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{aligned}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

Parte (⇒)
Suponha x é um fixpoint de f.
Seja $n \in \mathbb{N}$.
Indução em n.
Caso base:
Temos $f^0 = id$.
Logo $id\ x = x$.
Passo indutivo:
Suponha x fixpoint de f^n.
calculemos: $f^{n+1} x = (f \circ f^n) x$
$= f(f^n x)$
$= f\ x$
$= x$
∎

Parte (⇐)
Suponha $(\forall n \in \mathbb{N})[x \text{ é um fixpoint de } f^n]$
Logo seja $n = 1$. ← bizarro.
Logo x é um fixpoint de f^1.
∎

$f^1 \overset{?}{=} f$

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

$f = (+) \circ \langle cube, double \rangle$	$double : N \to N$ $double = (+) \circ \langle id, id \rangle$ $cube : N \to N$ $cube = (\cdot) \circ \langle id, square \rangle$ $square : N \to N$ $square = (\cdot) \circ \langle id, id \rangle$

definir a Δ parece interessante

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

$f\ x \mid x \in f^{-1} B$

DEMONSTRAÇÃO.

Parte $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ Seja $x \in A$. Logo $f\,x \in f[A]$ Logo $x \in f^{-1}[f[A]]$. ■	Parte $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$ seja $Y \in f[f^{-1}[B]]$. Logo seja $fx = Y$ t.q. $X \in f^{-1}[B]$. bugou! Logo $fx \in B$ Logo $Y \in B$. ■

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

não tem como conseguir isso.

Basta demonstrar $\neg f^{-1}[f[A]] \subseteq A$. Suponha $f^{-1}[f[A]] \subseteq A$ Logo seja $x \in f^{-1}[f[A]]$ t.q. $x \in A$. Logo $f\ x \in f[A]$. contradição. ■ ?? que?	Similar.

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

um isomorfismo

Para que F seja ~~isomorfa~~, deve haver uma função ~~G tal que~~ $G : \alpha \times \beta \times \alpha \longrightarrow \alpha \times \alpha \times \beta$ $\boxed{\text{definida por } G(a, b, a) = (a, a', b)}$. No caso, não é garantida uma função onde F a' = a'.

essa parte não fez sentido

type error.

escrever «não é garantido» não garanta que não é!

(15) **R** *Escolha **uma** das **R1**, **R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA ________ .

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+), (\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

Definição.

$\text{cube} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(\cdot) \circ \langle \langle\ ,\ \rangle, \circ \rangle$

!?

$f = \text{cube} + \text{double}$

type error

$\text{double} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(+) \circ \langle\ ,\ \rangle$

~~f = cube~~

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

Demonstração.

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

Resolução.

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\,(a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

por quê?

Para se estabelecer o isomorfismo é preciso de F seja bijetiva, ou seja injetiva e sobrejetiva. Como F não é injetiva, logo não serve para estabelecer o isomorfismo.

Sejam $a, a', b, a'' \in \mathbb{N}$ tal que $a' \neq a''$

Calc: $f(a, a', b) = (a, b, a)$

$= f(a, a'', b)$ ✓

Como $a' \neq a''$ mas $f(a, a', b) = f(a, a'', b)$, logo F não é injetiva. ✓

(15) **R**

Escolha ***uma*** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

(⇒)

Seja x tq: x é fixpoint da f

indução

base:

calc: $f^0 x = 1_A\, x$ (def. f^0)

$= x$ (def id) ✓

p.i:

seja n tq. $f^n = x$. [HI]

Calc: $f^{n+1} x = (f \circ f^n)(x)$ (def f^n)

$= f(f^n x)$ (def $\circ$)

$= f(x)$ (HI) ✓

$= x$ (x é fix point da f) ✓

Logo, x é fixpoint de f^{n+1}. ✓

∎

(⇐)

Suponha para todo $n \in \mathbb{N}$, x é um fixpoint da f^n

Seja $x \in \mathbb{N}$.

Aqui o 1 não é um testemunha

$\boxed{\text{Testemunha}}$ $n := 1$, ou seja $f^1 x = x$

Como $\boxed{f^1 x = f x}$, logo $f x = x$

Logo x é fixpoint da f.

por quê?

∎

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

todo o ponto era não ter

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).
DEFINIÇÃO.

cube + double

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\langle cube, double \rangle} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{(+)} \mathbb{N}$$

$$f\ x = (+) \circ \langle cube, double \rangle \circ \Delta$$

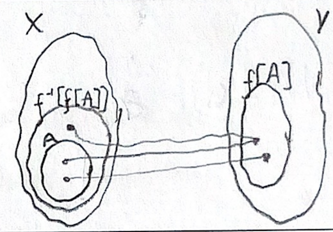
$$\Delta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad double : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\Delta \overset{def}{\equiv} (\_ , \_) \qquad double \overset{def}{\equiv} (+) \circ \Delta$$

??

$$\Delta_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$\Delta_3 \overset{def}{\equiv} ((\_ , \_), \_)$$
$$(\cdot) \circ \Delta_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$(\cdot) \circ \Delta_3 =$$

cube = ?

(16) **F**



Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.
F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
DEMONSTRAÇÃO.

parte $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.
Seja $a \in A$.
Logo $fa \in f[A]$. (def. função imagem)
Logo $a \in f^{-1}[f[A]]$. (def. função pré imagem)

parte $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
Seja $y \in f[f^{-1}[B]]$.
Seja $b \in X$ tq. $fb \in f[X]$.
Vou demonstrar $y \in f[X]$.

bugou. Qual era o alvo aqui?

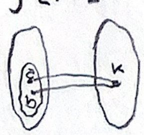
Escolho b como testemunha.
Logo $y = fb$.
Logo $y \in f[X]$.

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

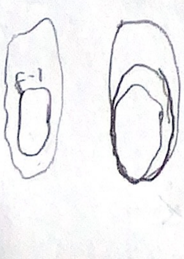
$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO. isso não faz sentido. tu escolhe os dados mas não os cálculos!!

Considere $f^{-1}[f[A]] = \{a, b\}$ tq $fa = k$ e $fb = k$, $A = \{a\}$ logo $f[A] = \{k\}$. Temos que $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ mas $f^{-1}[f[A]] \not\subseteq A$



Só isso mesmo.



$f[A]$ $\qquad f^{-1}[f[A]] = \{ x \in X \mid fx \in f[A] \}$

(16) **I**

Def iso f

essa coisa n satisfaz

enunciado

Explique porque a $F : \alpha \times (\alpha \times \beta) \to (\alpha \times \beta) \times \alpha$ definida pela

$$F\,(a, a', b) = (a, b, a)$$

$G\,(a, b, a) = (a, \grave{a}, b)$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times (\alpha \times \beta) \cong \alpha \times (\beta \times \alpha)$.

RESPOSTA. α esse retorn e βesse int

X $\boxed{\alpha \cong \beta \iff (\exists F : \alpha \to \beta)}(\exists G : \beta \to \alpha)[G \circ F = id_A \ \& \ F \circ G : id_B]$

o a retorna a, o b retorna a e a' retorna b enquanto ninguém retorna o à. ?!?! type error

Logo, a função não é injetiva pois $F b = a$ e $F a = a$ e não é sobrejetiva pois há membros no codomínio que não são ligados a membros do domínio.

viajou muito handwavingamente aqui!

(15) **R** *Escolha* **uma** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

$(\forall f, f')[$

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

(⇒) Suponha x é um fixpoint da f, ou seja, $f\,x = x$.

Indução.

Base:

Calc: $f^0 x = id\ x = x$

PI

Seja k tq $f^k x = x$ (hi)

Calc:

$f^{Sk} x = (f \circ f^k)\, x$

$= f\,(f^k x)$

$= f\ x$ (hi)

$= x$ (Pela hipótese)

(⇐) Suponha $(\forall n \in \mathbb{N})[\,x$ é um fixpoint da $f^n]$.

"Na"! ~~Pela~~ hipótese, tome $n := 1$.

Logo x é um fixpoint da f^1.

Calc: $f^1 = f \circ f^0 = f \circ id = f$

Logo $f^1 = f$.

Logo x é um fixpoint da f

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

$\Delta : \alpha \to \alpha \times \alpha$ $\quad\Delta_{inv} : \alpha \times \alpha \to \alpha$ $\quad$ square $= (\cdot) \circ \Delta$ ✓

$\Delta : \langle id, id \rangle$ ✓ $\quad\Delta_{inv}\ w = \ell\ w$ $\quad$ double $= (+) \circ \Delta$ ✓

type error

$f = (+) \circ (\cdot) \circ (\cdot) \circ outr \circ \Delta_{inv}\ \ell.\_ \circ \Delta \circ outl \circ (+) \circ outr \circ \Delta \circ \Delta$

$S \circ O \circ C \circ O \circ r \circ r \circ O \circ (!)$

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \underset{(1)}{\subseteq} f^{-1}[f[A]]$ & $B \underset{(2)}{\supseteq} f[f^{-1}[B]]$.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte (1)

Seja $x \in A$. ✓

Logo $f x \in f[A]$. ✓ [def imagem]

Logo $x \in f^{-1}[f[A]]$. ✓ [def preimagem]

Parte (2)

Seja $y \in f[f^{-1}[B]]$ ✓

Seja $x \in f^{-1}[B]^{(1)}$ tq $f x = y$ ✓

??X $\boxed{\text{Seja}}$ $f x \in B$. [(1)]

Logo $y \in B$. ✓ [$f x = y$]

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

(15) **R** *Escolha* ***uma*** *das R1, R2*

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 \\ b(1) &= 1 \\ b(n) &= b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{aligned}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R1 .

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F(a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

por que tanta tinta?

Note que, não há maneira de definir uma função inversa que desfaz o que foi feito pela F. Já que, o a' é "perdido" ao aplicar a F nos argumentos.	$\alpha := \mathbb{N}$ e $\beta := \mathbb{R}$. $a := 1$; $a' := 2$; $b = 2.5$ $F(1;2;2.5) = (1;2.5;1)$ handwaving incompleto

(15) **R** *Escolha uma das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$\begin{cases} b(0) = 0 \\ b(1) = 1 \\ b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{cases}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n. \quad (I)$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

($\Rightarrow$): Sup. x é um fixpoint da f. ✓ ~~Caso~~ base: x é um fixpoint da $f^0 = Id$. Pois, $Id\ x = x$. ✓ PI: Seja k, t.q. x é um fixp. da f^k. Como x é fixp. da f e da f^k, logo x é fixp. da $f^{k+1} = f^k \circ f$.	($\Leftarrow$): Suponha (I). escolho $n := 1$. Ou seja, x é fixpoint da f. ✗ ? Imediato ✗ não!

é exatamente isso que tu precisa demonstrar!!

Efetivamente o que tu escreveu aqui foi o seguinte:

«como [meus dados] logo [meu alvo].»

veja briga sobre como-logo mágico!

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\,x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

qual tipo de soma é relevante aqui?

$\text{triple} : \alpha \to \alpha \times (\alpha \times \alpha)$ $\text{triple} \overset{\text{def}}{=} \langle \_, \langle \_, \_ \rangle \rangle$ roubou! $\text{qube} : \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ $\text{qube} = (\cdot) \circ \text{outl} \circ \text{outr} \circ \text{outr}$ type error!	$f = [\text{qube} \circ \text{triple} \mid (+) \circ \langle , \rangle]$ Aceitaria $f = \_^3 + 2 \cdot \_$?

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

B

DEMONSTRAÇÃO.

$(\subseteq)$: Seja $x \in A$. ~~Como $x \in A$~~, logo $fx \in f[A]$. Ou seja, $\cancel{x}\ x \in f^{-1}[f[A]]$.	$(\supseteq)$: Seja $x \in f[f^{-1}[B]]$. Seja $a \in f^{-1}[B]$, t.q. $fa = x$. (1) Como $fa \in B$, logo $x \in B$, pela (1).

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

$A \supseteq f^{-1}[f[A]]$:	$B \subseteq (\ldots)$

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\,(a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

?!

Não existe homomorfismo a partir da F, isto é, não é possível definir uma função de "volta" que recupere a informação perdida na imagem.

Faça $\alpha = \mathbb{N}$ e $\beta = \mathbb{R}$: $F(1, 2, 3.14) = (1, 3.14, 1)$ | "Poderia até definir para alguns elementos do cod(F), mas não para todos.

testemunha sem demonstração que serve

(15) **R** *Escolha* ***uma*** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2 .

Seja $x : A$.
Parte ($\Rightarrow$):
Suponha que $f\,x = x$.
Indução no n.
Base:
Temos que $f^0 = id$.
Calc: $id\ x = x = f\,x$.
Passo indutivo:
Seja k t.q. $f^k x = x$.

cont...
Calc:
$f^{k+1} x = (f \circ f^k)\,x$
$= f\,(f^k x)$
$= f\,x$ (H.I)
$= x$

Parte ($\Leftarrow$):
Suponha que $(\forall n \in \mathbb{N})[f^n x = x]$
Logo $f^1 x = x = f\,x$.
■

(?)

(15) **T**

Usando apenas as $\langle\_,\_\rangle$, $[\_\,|\,\_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).
DEFINIÇÃO.

cube : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
cube $= (\cdot) \circ \langle$square, id$\rangle$
double : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
double $= (+) \circ \Delta$

square : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
square $= (\cdot) \circ \Delta$
$f = (+) \circ \langle$cube, double$\rangle$

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.
F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
DEMONSTRAÇÃO.

$(A \subseteq f^{-1}[f[A]])$:
seja $a \in A$.
Escolho a como testemunha. ✗

qual é teu alvo aqui?

$(B \supseteq f[f^{-1}[B]])$:
seja $y \in f[f^{-1}[B]]$.
seja $x \in f^{-1}[B]$ t.q. $fx = y$.
Logo $fx \in B$.
Logo $fx = y \in B$.

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

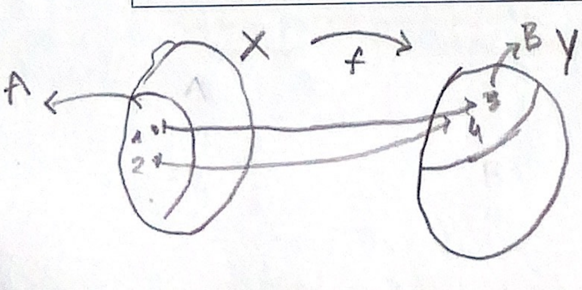
$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Pois não é garantido que f é invertível.
Não consegui pensar em algo legal :(

Não compila o pt!.

Só isso mesmo.



$f^{-1}[f[A]] = \emptyset$

$f[A] = \{3,4\}$

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

por que não Unit?

RESPOSTA.

tome como contra-exemplo $\alpha := 2$ (Unit+Unit) e $\beta := \mathbb{N}$; $a := 1.*$, $a' := 2.*$ e $b := 42$. $F(1.*, 2.*, 42) = (1.*, 42, 1.*)$. A informação do 2.* foi perdida.

isso não compila!

(15) **R** *Escolha **uma** das **R1**, **R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 \\ b(1) &= 1 \\ b(n) &= b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{aligned}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R1.

Sejam $b, b' : N \to N$, e $n : N$ X

assim são arbitrárias

indução no n. ?

Caso $n = 0$:

Calc:

$b(0) = 0$ [b.1] ×

$= b'(0)$ [b'.1] ×

caso $n = 1$:

Calc:

$b(1) = 1$ [b.2] ×

$= b'(1)$ [b'.2] ×

passo indutivo: $\boxed{\varphi(n) \land \varphi(n+1) \Longrightarrow \varphi(n+2)}$

Suponha $b(n) = b'(n)^{(1)} \land b(n+1) = b'(n+1)$.

quem é φ?!

Calc:

$$\begin{aligned} b(n+2) &= b((n+2)-1) + b((n+2)-2) && [b.3] \checkmark \\ &= b(n+1) + b(n) && [+1] \checkmark \\ &= b(n+1) + b'(n) && [(1)] \checkmark \\ &= b'(n+1) + b'(n) && [(2)] \checkmark \\ &= b'(n+2) && [b'.3] \checkmark \end{aligned}$$

■

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

$f : N \to N$

$f = (+) \langle cube, dollble \rangle$

$Sqr : N \to N$

$Sqr = (\cdot) \circ \Delta$

$double : N \to N$

$double = (+) \circ \Delta$

$\Delta : N \to N \times N$

$\Delta = \langle id_N, id_N \rangle$

$cube : N \to N$

$Cube = (\cdot) \langle id_N, Sqr \rangle$

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

DEMONSTRAÇÃO.

$A \subseteq f^{-1}[f[A]]$

Seja $a \in A$.

Logo, $fa \in f[A]$. [pela definição do $f[-]$]

Logo, $a \in f^{-1}[f[A]]$. [pela definição do $f^{-1}[-]$]

∎

$B \supseteq f[f^{-1}[B]]$

Seja $b \in f[f^{-1}[B]]$. (1)

Logo, sepa $x \in f^{-1}[B]$, t.q. $b = fx$ [(1)].

Logo, $b \in B$ [pela definição do $f^{-1}[-]$].

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

$A = f^{-1}[f[A]]$ se e somente se f é injetiva, analogamentl, $B = f[f^{-1}[B]]$ sse f é sobrejetiva.

como isso (i) responde nesta questão ?
(ii) é convincente?

Só isso mesmo.

(15) **T**

Usando apenas as $\langle\_,\_\rangle$, $[\_\mid\_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

Def. ~~Cube~~ Seja Cube : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida ~~por~~ pela

Cube $\cancel{x = x \cdot x \cdot x}$ $= (\cdot) \circ \{id, \underbrace{(\cdot) \circ \{id, id\}}\}$

que tal pensar um nome bom pra isso?

Seja Double : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pela

Double $\cancel{x = 2 \cdot x}$ $= (+) \circ \underbrace{\{id, id\}}$

e pra isso?

Definimos a f pela

!!

$\cancel{f = (+) \circ \{Cube, Double\} \circ \{id, id\}}$ $f = (+) \circ \overbrace{\{Cube \circ OutL, Double \circ OutR\} \circ \{id, id\}}$

HW de castigo. $\langle f \circ outl,\ g \circ outr \rangle \circ \langle id, id \rangle = ?$

$\langle f \circ outl,\ g \circ outr \rangle \circ \langle u, v \rangle = ?$

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

DEMONSTRAÇÃO.

Separo em partes.

Parte $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$:

Seja $a \in A$.

Pela definição da f, $[-]$ temos que $fa \in f[A]$.

Logo, pela definição da f^{-1}, $[-]$ temos que $a \in f^{-1}[f[A]]$.

Parte $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$:

Seja $y \in f[f^{-1}[B]]$.

Logo, seja x tal que $fx = y$ & $x \in f^{-1}[B]$ ~~& $x \in f^{-1}[B]$~~. [Pela definição da f] [I]

Extraio-R da I.

~~Com~~ Logo, como $x \in f^{-1}[B]$, pela definição da f^{-1}, temos que $fx \in B$.

Extraio-L da I.

~~Logo,~~ Como $fx = y$, logo $y \in B$.

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Seja $b \in B$. tal que $(\forall a \in A)[fa \neq b]$

~~Suponha que $(\forall a \in A)[fa \neq b]$.~~

~~Logo, pelas definições de f e f^{-1}, temos que $b \notin f[f^{-1}[B]]$~~

~~Logo, $(\nexists a \in f^{-1}[B])[fa = b]$.~~

Suponha

essa tentativa tem cara de tentativa-de-demonstração. Mas aqui tu precisa fornecer dois contraexemplos.

Só isso mesmo.

$(\forall$ Iso $\Rightarrow$ Sobre$) \Rightarrow (\neg$Sobre $\Rightarrow \neg$ Iso$)$

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$ perdeu a info do a'

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

por quê?

Para ser Iso, F precisa ser sobrejetiva e injetiva. Considere/Tome $\alpha = \mathbb{2}$ e $\beta = \mathbb{1}$. Vou mostrar que F não é sobrejetiva. Suponha F sobrej. Logo, sejam a, a', b t.q. $F(a, a', b) = (0, *, 1)$. Pela def. de F, temos $a = 0$ e $a = 1$. Logo $0 = 1$ e Boom. ✓
Resta mostrar $(\forall F \text{ Iso})[F \text{ sobrej.}]$ Seja F Iso, temos F invertível (Shadow) (Extra). ? Seja $y \in \mathrm{cod}(F)$. Testemunhe $F^{-1}y$. Temos $F(F^{-1}y) = y$, pois $F \circ F^{-1} = id$. ∎ ✓

contentos dados com pressa maturidade.

:D

(15) **R** *Escolha **uma** das **R1**, **R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

Se tem duas, só podem ser se são iguais.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

Seja $x \in A$.
$(\Rightarrow)$:
Suponha $x = fx$ ✓
Seja $n \in \mathbb{N}$. ✓
Indução no n. ✓
$(n = 0)$:
temos $f^0 = id_A$. ✓
Logo $f^0 x = x$. ✓
$(n = Sk)$:
calculamos:
$f^{Sk} x = (f \circ f^k) x$.
$= f(f^k x)$
$= f(x)$ [(h.i)] ✓
$= x$ [x é um fix point]. ✓
∎
$(\Leftarrow)$:
Suponha $(\forall n \in \mathbb{N})[x = f^n x]$.
Logo $f^1 x = x$.
calculamos:
$f^1 x = (f \circ f^0) x$
$= f(f^0 x)$
$= f(id\ x)$ ✓
$= f x$. ✓
∎

(15) **T**

Usando apenas as $\langle -,- \rangle$, $[-\,|\,-]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver). nas auxiliares.

↳ Nada impede usar pontos

DEFINIÇÃO.

$\Delta_\alpha : \alpha \to \alpha \times \alpha$

$\Delta_\alpha = \langle id_\alpha, id_\alpha \rangle.$

defino a $f = (\text{cube} \times \text{double}) \circ \Delta.$

? ? type error

$(- \times -) : (\alpha \to \beta) \times (\delta \to \gamma) \to (\alpha \times \delta) \to (\beta \times \gamma)$ (definidos Recomento)

$(f \times g) = \langle f \circ \text{outl}, g \circ \text{outr} \rangle.$

$g\,x = x^3 + 2x$

$f = g$

Nice try.

~~$f\,[X] = \{f x \mid x \in X\}$~~

~~$f\,[Y] = \{x \in X \mid f x \in Y\}$~~

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $\underbrace{A \subseteq f^{-1}[f[A]]}_{(i)}$ & $\underbrace{B \supseteq f[f^{-1}[B]]}_{(ii)}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte (i):

Seja $a \in A$. ✓

Temos $fa \in f[A]$ ✓

Comentários: ???

mostrar que um $x \in f^{-1}(f[A])$

é mostrar que $fx \in f[A]$.

esquisito

Parte (ii)

Seja $y \in f[f^{-1}[B]]$.

Vou mostrar que há x t.q. $fx \in f^{-1}[B]$.

?

Sorry

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

basta f n ser inverível (Low Time Rush)

my fault

...

Só isso mesmo.

Só?!!!

$fx \in f^{-1}[B] \iff f$

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

Para estabelecer isomorfismo é necessária haver uma inversa, ou seja, que $F \circ F^{-1} = id$ e $F^{-1} \circ F = id$. Não havendo perda de informação, porém a F perde o a', o que impossibilita voltar para ele sem recuperar o que foi perdido.

Considere $\alpha := \mathbb{N}$ e $\beta := Bool$

ex.: $F(1, 5, true) = (1, true, 1)$.

Foi perdido

Se houvesse função "inversa", teríamos:

$F^{-1} : \alpha \times \beta \times \alpha \to \alpha \times \alpha \times \beta$

$F^{-1}(a, b, a) = (a, a, b)$

Note que $F^{-1} \circ F \neq id$, usando o ex.:

$F^{-1}(F(1,5,true)) =$
$= F^{-1}(1, true, 1)$
$= (1, 1, true)$

Diferente do início. $\neq id$.

(15) **R** *Escolha* ***uma*** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$(fib) \begin{cases} b(0) = 0 \\ b(1) = 1 \\ b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{cases}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R1.

Sejam $b, b' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q b respeita fib & b' respeita fib. (h)

Indução.

BASE1:

Calculamos:

$b\,0 = 0.$ [(h.1).1]

$b'\,0 = 0.$ [(h.2).1]

BASE2:

Calculamos:

$b\,1 = 1.$ [(h.1).2]

$b'\,1 = 1.$ [(h.2).2]

PASSO INDUTIVO:

Seja k, t.q. $b(k-2) = b'(k-2)$ & $b(k-1) = b'(k-1)$. (HI)

Calculamos:

$b\,k = b(k-1) + b(k-2)$ [(h.1).3]

$= b'(k-1) + b(k-2)$ [(HI).2]

$= b'(k-1) + b'(k-2)$ [(HI).1]

$= b'k.$ [$\leftarrow$ (h.2).3]

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).
DEFINIÇÃO.

$\Delta : \alpha \to \alpha \times \alpha$
$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \langle id, id \rangle$

square : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
square $\stackrel{\text{def}}{=} (\cdot) \circ \Delta$

double : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
double $\stackrel{\text{def}}{=} (+) \circ \Delta$

cube : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
cube $\stackrel{\text{def}}{=} (\cdot) \circ \langle id, \text{square} \rangle$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f \stackrel{\text{def}}{=} (+) \circ \langle \text{cube}, \text{double} \rangle$

✓ ✓ ✓ ✓ ✓

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.
F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
DEMONSTRAÇÃO.

PARTE $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$:
Seja $a \in A$. ✓
Logo $f a \in Y$. ??
Como $a \in A$, logo $f a \in \underbrace{\{f x \mid x \in A\}}_{f[A]}$.

PARTE $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$:
Seja $x \in f^{-1}[B]$, ou seja, $f x \in B$. ✓

um comentário ajudaria aqui.

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

$A := \{1, 2\}$
$B := \{5, 7, 8\}$
$1 \xmapsto{f} 5$
$2 \xmapsto{f} 7$

$f[f^{-1}[B]] = f[\{1, 2\}]$
$= \{5, 7\} \neq B$ ✓

$A := \{1, 2, 3\}$

..?

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

quem é?!

Para estabelecer o isomorfismo, é preciso que $F \circ G = id_{dom\,G}$ e $G \circ F = id_{dom\,F}$.

Tome $\alpha := \mathbb{N}$, $\beta := Bool$. Note que $F(5, 6, true) = (5, true, 5)$. Como perde-se o acesso ao 6, não é possível compor uma G com a F, e recuperar o 6.

(15) **R** *Escolha uma das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$\Theta.\text{def}\ ?\ \begin{cases} b(0) = 0 \\ b(1) = 1 \\ b(n) = b(n-1) + b(n-2), & \text{para todo } n > 1. \end{cases}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R1.

Sejam b, b' t.q. ~~concordam~~ satisfazem com Θ.def.

Indução:

Caso 0:

Calc:

$b\,0 = 0$ [b.0]
$= b'0.$ [b'.0]

Caso 1:

Calc:

$b\,1 = 1$ [b.1]
$= b'1$ [b'.1]

Caso $K > 1$:

Suponha $b(K-1) = b'(K-1)^{(1)}$
e $b(K-2) = b'(K-2).^{(2)}$

Calc:

$b\,K = b(K-1) + b(K-2)$ [b.3]
$= b'(K-1) + b(K-2)$ [(1)]
$= b'(K-1) + b'(K-2)$ [(2)]
$= b'K.$ ∎

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

double : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
double $= (+) \circ \langle 1, 1 \rangle$ ✓

pow3 : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
pow3 $= (\cdot) \circ \langle \underbrace{(\cdot) \circ \langle 1, 1 \rangle}_{\text{nomeie!!}}, 1 \rangle$

$f = (+) \circ \langle \text{pow3}, \text{double} \rangle$ ✓

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $a \in A$.
Logo $f a \in f[A]$. ✓
Logo $a \in f^{-1}[f[A]]$. ✓

Seja $b \in f[f^{-1}[B]]$ ✓
Logo seja a t.q. $fa = b$. ✓
Logo $a \in f^{-1}[B]$. ✓
Logo $fa \in f[f^{-1}[B]]$. ✓
Logo $b \in f[f^{-1}[B]]$. ✓

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A \underset{\not\supseteq}{=} f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B \underset{\not\subseteq}{=} f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Para $A \neq f^{-1}[f[A]]$:
Tome $\{1,2\} \xrightarrow{f} \{0\}$, (definida por $f_n = 0$)
Tome $A = \{1\}$.
Calculemos:
$f^{-1}[f[\{1\}]]$
$= f^{-1}[\{0\}]$
$= \{1,2\}$
$\neq \{1\}$. ✓

Para $B \neq f[f^{-1}[B]]$:
Tome $\{1,2\} \xrightarrow{f} \{0,1\}$, definida por $f_n = 0$. ✓
Tome $B = \{0,1\}$.
Calculemos:
$f[f^{-1}[\{0,1\}]]$
$= f[\{1,2\}]$
$= \{0\}$
$\neq \{0,1\}$ ✓

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

Para que F estabeleça um isomorfismo é necessario existir um $G : \alpha \times \beta \times \alpha \to \alpha \times \alpha \times \beta$ e que $F \circ G = Id_{\alpha \times \beta \times \alpha}$ & $G \circ F = Id_{\alpha \times \alpha \times \beta}$

...mas qual dos dois vai ser um problema aqui? (Faça uma escolha!)

seja Bool o tipo α e unit o β

$F\ (T, \ast, \ast) = (T, \ast, T)$

~~F (θ, ∗, ∗)~~

&

$G\ (T, \ast, T) = (T, p, \ast)$ — por quê?

nesse caso o meu T pode ser ~~[illegible]~~ p mudado para T ou False criando-se certa ambiguidade, esse problema não se dá pois a F não respeita o à.

não dá para compilar..

(15) **R** *Escolha uma das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R1.

Sejam $f, f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. f respeita ν e f' respeita ν

Basta demonstrar que $f = f'$

Caso $f\,0 = f'\,0$:

Calc:

$f\,0 = 0$ [f.1]

$= f'\,0$ [f'.1]

Caso $f\,1 = f'\,1$:

Calc:

$f\,1 = 1$ [f.2]

$= f'\,1$ [f'.2]

Caso $(\forall m)\,[f\,m = f'\,m \ \&\ f\,Sm = f'\,Sm \Rightarrow f\,SSm = f'\,SSm]$

seja m : Nat t.q. $f\,m = f'\,m$ & $f\,Sm = f'\,Sm$ (HI)

Calc:

$f\,SSm = f\,Sm + f\,m$ [f.3]

$= f'\,Sm + f\,m$ [HI.n]

$= f'\,Sm + f'\,m$ [HI.1]

$= f'\,SSm$ [← f'.3]

(15) **T**

Usando apenas as $\langle\_,\_\rangle$, $[\_|\_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).

DEFINIÇÃO.

~~double = (+) ∘ ⟨Id, Id⟩~~ $\Delta = \langle Id, Id\rangle$ ✓

tipos!

double $= (+) \circ \Delta$ ✓

square $= (\cdot) \circ \Delta$ ✓

Pow3 $= (\cdot) \circ \langle$ square, $Id\rangle$ ✓

$f = (+) \circ \langle$ Pow3, double$\rangle$ ✓

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$: ✓ ✓

seja $a \in A$

logo $fa \in f[A]$

~~Como fa ∈ f[A]~~ logo $a \in f^{-1}[f[A]]$ ✓

Parte $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$

seja $x \in f[f^{-1}[B]]$, ou seja $fx \in f^{-1}[B]$ ✗

Como $fx \in f^{-1}[B]$

logo $x \in B$. ✗

nome ruim!

o que significa $x \in f[f^{-1}[B]]$?

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Para $A = f^{-1}[f[A]]$:

seja $A = \{0,1\}$ e $f = k_0$:?

o $f[A]$ será $\{0\}$ e o $f^{-1}[\{0\}]$ será N

~~logo~~

mas $\{0,1\} \neq N$

logo $A \neq f^{-1}[f[A]]$ ✓

Para $B = f[f^{-1}[B]]$:

seja $B = N$

e $f = k_0$

$f^{-1}[N] = N$ e $f[N] = \{0\}$

~~logo~~

mas $N \neq \{0\}$

logo $B \neq f[f^{-1}[B]]$ ✓

Só isso mesmo.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

F não é injetora, logo não é bijetora, logo não é invertível (por quê?)
tome como contra exemplo $\alpha := \mathrm{Nat}$, $\beta := \mathrm{Unit}$
$f(1, 2, *) = (1, *, 1)$
$f(1, 3, *) = (1, *, 1)$
$f(1, 2, *) = f(1, 3, *)$, mas $(1, 2, *) \neq (1, 3, *)$

(15) **R** *Escolha* ***uma*** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2 .

~~Seja~~ $x \in A$
Parte x é um Fixpoint da $f \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\,[x$ é um fixpoint da $f^n]$

Suponha x Fixpoint da f (1)
seja $n \in \mathbb{N}$
Por indução em n
caso $n = 0$
Calc: $f^0 x = id_A\, x$ [[f^-].0]
$= x$

caso $n = Sm$
Suponha x é um Fixpoint da $f^m x$
Calc: $\underbrace{(f^n x =)}_{\text{por quê?!}}\ \underbrace{f^{Sm} x}_{\text{começa com isso!}}$ [$n = Sm$]

$f^{Sm} x = (f \circ f^m)\, x$ [f^-).1]
$= f(f^m x)$ [(∘).1]
$= f\, x$ [H.I.]
$= x$ [(1)]

Parte ⇐ (2)
Suposto $(\forall n \in \mathbb{N})\,[x$ é um Fixpoint da $f^n]$
Aplico a (2) no $S0$ para obter x é um Fixpoint da f^{S0}.
Calc: $f^{S0} = f \circ f^0$ [f^-).1]
$= f \circ id_A$ [(f^-).0]
$= f$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\Delta\times id} (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times\mathbb{N} \xrightarrow{(\cdot)\times id} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{(\cdot)} \mathbb{N}$$

(15) **T**

Usando apenas as $\langle -,- \rangle$, $[-|-]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\,x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).
DEFINIÇÃO.

~~$\Delta_N \stackrel{def}{=} \langle id_N, id_N \rangle$~~ ~~$(f\times g) \stackrel{def}{=} \langle f\circ outl, g \circ outr\rangle$~~

~~$double \stackrel{def}{=} (+)\circ\Delta$~~ ~~3-Pow~~

$f = (+)\circ\langle 3\text{-pow}, double\rangle$ ✓

$\Delta_N : N \to N\times N$ $\Delta_N = \langle id_N, id_N \rangle$ ✓	$double : N \to N$ $double = (+)\circ\Delta$ ✓	$(\_\times\_) : (A\to B)\times(C\to D) \to (A\times C \to B\times D)$ $(f\times g) = \langle f\circ outl, g\circ outr\rangle$ ✓	$3\text{-pow} : N \to N$ $3\text{-pow} = (\cdot)\circ((\Delta\times id)\circ(\Delta\times id)\circ\Delta$ ✓

(complicou demais)

(16) **F**

$x \in f^{-1}[f[A]] \Leftrightarrow f\,x \in f[A]$

$f^{-1}\,y = \{x \mid f\,x \in X\}$

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.
F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
DEMONSTRAÇÃO.

\# $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$

Seja $a \in A$ ✓

Basta demonstrar $f\,a \in f[A]$ ✓

Imediato pela $a \in A$ ✓

\# $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$

Seja $\boxed{x}$ $\in f[f^{-1}[B]]$ ✓ nome ruim!

logo seja $x' \in f^{-1}[B]$ t.q. $f\,x' = x$ ✓

como $x' \in f^{-1}[B]$, logo $f\,x' \in B$ ✓

Como $x = f\,x'$, logo $x \in B$ ✓

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Tome como contraexemplo $Y = \emptyset$, $X = \{1,2\}$, $A = \{1\}$, $\boxed{f : X \to \emptyset}$

calc: $f[A] = \{f\,a \mid a \in A\} = \emptyset$

calc: $f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[\emptyset] = \{x \mid f\,x \in \emptyset\} = \emptyset$

$\{1\} \neq \emptyset$.

Não existe tal função. (Por quê?)

Tome como contraexemplo $X = \emptyset$, $Y = \{1,2\}$ e $B = \{1\}$ e $f : \emptyset \to Y$

$f^{-1}[B] = f^{-1}[\{1\}] = \{x \mid f\,x = 1\}$ $= \emptyset$

$f[f^{-1}[B]] = f[\underbrace{\{x \mid f\,x = 1\}}_{\emptyset}] = \{f\,a \mid a \in \{x \mid f\,x = 1\}\}$
$= \{f\,a \mid f\,a = 1\}$
$= \emptyset$

$\{1\} \neq \emptyset$

?

Só isso mesmo. complicou!

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

Porque a F não é sobrejetiva. Suponha F é sobrejetiva. ($F : Int \times Int \times Int \to Int \times Int \times Int$) Logo $(\exists a, a', b : Int)[F(a, a', b) = (1, 2, 0)]$. [F sobrejetiva] Sejam a, a', b t.q. $F(a, a', b) = (1, 2, 0)$. Logo $a = 1$ & $a = 0$.	Logo $1 = 0$.

mas o que isomorfismo significa?

(15) **R** *Escolha* ***uma*** *das* ***R1***, ***R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$b(0) = 0$$
$$b(1) = 1$$
$$b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1.$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R2.

virou grega?

$(\Rightarrow)$: Suponha x é um fixpoint da ϕ. (1) Indução no n. Base: Calc: $\phi^0 x = id\ x$ [ϕ^n.1] $= x$ [id.1] Passo indutivo: Seja x t.q. x é um fixpoint da ϕ^n. (H.I) Calc: $\phi^{n+1} x = (\phi \circ \phi^n) x$ [ϕ^n.2] $= \phi(\phi^n x)$ [$\circ$.1] $= \phi x$ [(H.I)] $= x$ [(1)]	$(\Leftarrow)$: Suponha $(\forall n \in \mathbb{N})[x$ é fixpoint da $\phi^n]$. Logo x é fixpoint da ϕ^1. Logo $\phi^1 x = x$. ..?

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).
DEFINIÇÃO.

$double : N \to N$ $double = (+) \circ \langle id, id \rangle$ $cubar : N \to N$ $cubar = (\cdot) \circ \langle id, \underbrace{(\cdot) \circ \langle id, id \rangle}_{\text{nomeie!}} \rangle$	$f : N \to N$ $f = (+) \circ \langle cubar, double \rangle$

(16) **F**

$\forall y \in Y\ \exists\, f\ a = y$

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

$f[A] = \{ \ldots \}$

$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f\, x \in B \}$

F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
DEMONSTRAÇÃO.

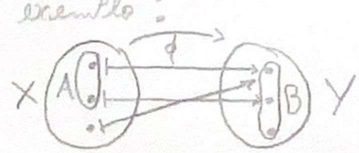
Parte $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$:
Seja $a \in A$.
Logo $f\ a \in f[A]$. $[A \subseteq X]$
Logo $a \in f^{-1}[f[A]]$. $[f\ a \in f[A]]$
Parte $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$:
Seja $b \in f[f^{-1}[B]]$.$^{(1)}$
Logo, seja x t.q. $f\ x = b$. $[(1)]$
Logo $f\ x \in B$. $[x \in f^{-1}[B]]$
Logo $b \in B$. $[f\ x = b]$

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f[f^{-1}[B]].$$

RESOLUÇÃO.

Considere o seguinte exemplo:



Observe que $A \neq f^{-1}[f[A]]$ & $B \neq f[f^{-1}[B]]$.

Só isso mesmo.