FMC2, 2024.1
(Turma T12 do Thanos)

Prova CFR1.2
(points: 62; bonus: $0^\flat$; time: 62')

Nome: Θάνος

2024-05-03

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Definição. Seja $f : A \to A$ um endomapa num conjunto A. Chamamos *fixpoint* da f qualquer $x \in A$ tal que $f\ x = x$.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(16) **I**

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.

RESPOSTA.

Deveria existir inversa da F. Considere $\alpha := \mathbb{N}$, $\beta := \mathbb{1}$

Suponha F possui L-inverso,

Logo seja $G : \alpha\times\alpha\times\beta \leftarrow \alpha\times\beta\times\alpha$ t.q. $G \circ F = \text{id}$.

Logo $(0, 42, *) = (G\circ F)(0,42,*) = G(F(0,42,*)) = G(0,*,0)$

$= G(F(0,0,*)) = (G\circ F)(0,0,*) = (0,0,*)$.

Logo $42 = 0$. Contradição.

(15) **R** *Escolha **uma** das **R1**, **R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$(*)\begin{cases} b(0) = 0 \\ b(1) = 1 \\ b(n) = b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{cases}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA R1 & R2.

Sejam $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $(*)$.

Por indução.

BASE $f\,0 \stackrel{?}{=} g\,0$: Calc: $f\,0 = 0$
$= g\,0$.

BASE $f\,1 \stackrel{?}{=} g\,1$: Similar.

PASSO INDUTIVO. Seja $k > 1$ t.q. f, g concordam nos $k-1$ e $k-2$

Calc: $f\,k = f\,(k-1) + f\,(k-2)$

$= g\,(k-1) + g\,(k-2)$

$= g\,k$.

($\Longrightarrow$): Por indução.

BASE: $f^0 x = \text{id}\, x = x$.

PASSO IND.: Seja k t.q. x fixpoint da f^k.

Calc: $f^{Sk} x = (f \circ f^k)\, x$

$= f\,(f^k x)$

$= f\,x$

$= x$

($\Longleftarrow$):

Temos x fixpoint da f^1. [(hip) 1]

Mas $f^1 = f \circ f^0 = f \circ \text{id} = f$.

Logo x fixpoint da f.

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).
DEFINIÇÃO.

$f = (+) \circ \langle \mathrm{cube}, \mathrm{double} \rangle$

$\mathrm{cube} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\mathrm{cube} = (\cdot) \circ \langle \mathrm{id}, \mathrm{square} \rangle$

$\mathrm{square} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\mathrm{square} = (\cdot) \circ \Delta$

$\mathrm{double} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\mathrm{double} = (+) \circ \Delta$

$\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\Delta = \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle$

(16) **F**

Sejam conjuntos X e Y, $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.
F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ & $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $a \in A$.
Logo $f\,a \in f[A]$.
Logo $a \in f^{-1}[f[A]]$.

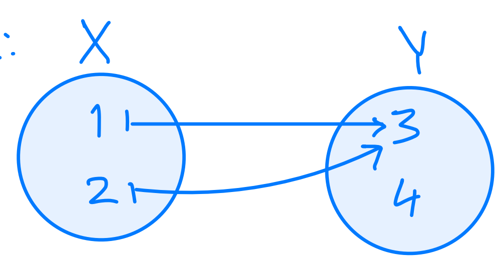
Seja $x \in f^{-1}[B]$. -- Assim $f\,x$ é um membro arbitrário de $f[f^{-1}[B]]$.
Logo $f\,x \in B$.

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f\left[f^{-1}[B]\right].$$

RESOLUÇÃO.

Considere:



$f^{-1}[f[\{1\}]] = f^{-1}[\{3\}] = \{1,2\}$

$f[f^{-1}[\{4\}]] = f[\emptyset] = \emptyset$

Só isso mesmo.

Rascunho