(11) **R**

Escolha exatamente uma das **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE R2 .

$(\Rightarrow)$:

$(\Leftarrow)$:

Suponha que $(\cdot u)$ é sobrejetiva. Seja $v \in R$ t.q. $\underbrace{vu}_{(\cdot u)v = 1} = 1$. [sobrej]

~~Imediato~~.

(o pézinho do 'u' não é opcional)

pezinho do u

pezinho do u

(11) **I**

Escolha exatamente uma das **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE .

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathcal{R}$-módulos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. φ homo $\overset{\text{def}}{\iff}$ φ resp. estrutura de grupos & φ resp. $(\bullet) \iff (\forall r \in R)(\forall a \in A)\,[r \bullet \varphi a = \varphi(r \bullet a)]$

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

Seja φ homo $: \mathcal{A} \to B$ e $r \in R$.

$(r\bullet) \circ \varphi = \varphi \circ (r\bullet)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(r\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & B \arrow[d, "(r\bullet)"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

assim foi ignorada a primeira parte!

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

$1_B \circ \varphi = \varphi \circ 1_A$ [φ resp id]

Só isso mesmo.

(11) R

Escolha exatamente uma das **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a \cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\, u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE R2

(⇒) suponha u é R-Unit.
Logo $(\exists v \in G)[vu = 1]$ ✓
seja $v \in G$ tal que $vu = 1$ ✓
Procuro $r \in R$ tal que $(\cdot u)\, r = v$. ✗

Não! Sobrejetiva significa que todos os membros do codomínio são imagens, não apenas o teu (não arbitrário v).

(11) I

Escolha exatamente uma das **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker \varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE I1 .

(15) M

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Só isso mesmo.

$(\forall x\in R)(\exists y\in R)[yu=x]$

$\Leftarrow$

$(\exists v\in R)[vu=1] \Rightarrow$ vale

xvu $\cdot u=1$

$uu=1$

$(\exists y\in R)[yu=x]$

$u=1$

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit ssc $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

Demonstração de R2.

($\Rightarrow$):

Logo seja $v\in R$, tal que $vu=1$. ✓

Seja $x\in R$. ✓

Basta demonstrar que xv serve.

Calculamos:

$xvu = x1$

$= x$. ✓

($\Leftarrow$):

Como $1\in R$, logo seja $v\in R$, tal que

$vu=1$. ✓

$(\cdot u)\,v=1$.

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

Demonstração de I2.

?!?!

Seja J ideal de S.

Parte $\varphi^{-1}[J]\subseteq R$:

Seja $x\in\varphi^{-1}[J]$.

Logo $\varphi x\in J$.

Logo $x\in R$.

Parte $\varphi^{-1}[J]\leq R_+$:

Parte Id:

Imediato $[J\leq R_+]$. Nope!

Uni test:

Sejam $x,y\in\varphi^{-1}[J]$.

Imediato $[J\leq R_{Ad}]$. ?!

Parte Absorção-L:

Seja $r\in R$.

Logo $\varphi r\in S$.

Logo $\varphi r J\subseteq J$ [J ideal de S].

Como isso mostra algo sobre o $\varphi^{-1}[J]$?

Logo $\varphi r\in J$.

Parte absorção-R:

Similar.

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

Definição.

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

Equação e diagrama comutativo.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

Verificação.

Só isso mesmo.

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE .

$\Rightarrow$:

Seja $x \in R$.

Seja $v \in R$ t.q. $vu = 1$

Temos $xv \in R$.

Vou demonstrar que xv serve.

$(xv) \cdot u = x(v \cdot u) = x1 = x$. ✓

$\Leftarrow$

Suponha $(\cdot u)$ sobre.

Temos $1 \in R$.

Seja $x \in R$ t.q. $x \cdot u = 1$. [$\cdot u$ sobre] ✓

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE I1 .

Temos que $\ker\varphi \trianglelefteq (R, +, 0, -)$. ✓

Basta que $\ker\varphi$ absorve as multiplicações.

por quê ?

$r \in R$

$k \in \ker\varphi$.

$\subseteq$)

Seja $r \in R$

quais letras são essas?

Logo $r' \ker\varphi = \{ r r' \in R \mid \varphi(r) \cdot r' = 0_S \}$

Como $\varphi(r) \cdot r' = 0_S$.

Logo $\varphi(r) \cdot r' = \varphi(0_R) \in \ker\varphi$.

Logo $r' \ker\varphi \subseteq \ker\varphi$.

2) Similar.

Não deu para acompanhar isso

Tome um $k \in \ker\varphi$ e um $r \in R$ e mostre que $rk \in \ker\varphi$!

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

mesmo nome?!

como assim?

bugou

Sejam R, R' R-módulos com G & G'.

φ é homomorfismo de $R \to R'$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ & $(\forall r, r')[\varphi(r^{-1}) = (\varphi r)^{-1}]$ & $\varphi(id_R) = id_{R'}$ $(\forall r, r')[\varphi(r \cdot r') = \varphi r \,\&\, \varphi r']$ & $(\forall r, g)[\varphi(r \cdot g) = \varphi r \cdot_{R'} \varphi g]$

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

$\varphi \circ \bullet = \bullet \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} R \times G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\bullet"'] & R' \times G' \arrow[d, "\bullet"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$$

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Só isso mesmo.

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE ~~R2~~ . R1

não dá pra ler isso. Não misture formulas e texto nessa maneira!

Seja R anel $a \in R$. Mostrar que $\forall$ $b = 0$ tq $ab = 0$, ou seja $a = -b$

??

$(a\,\cdot)$ é injetiva.

• Suponha que existe $b = 0$ tq $ab = 0$. Seja $b, c \in R$

suponha $(ab) = (ac)$ temos $0 = ac \Rightarrow$?? $a = c \Rightarrow b = c$

• Suponha $(a\,\cdot)$ injetiva. $\boxed{\text{Sejam } b, c \in R \text{ tq. } b = c = 0}$

temos $ab = ac = 0$.

↳ isso nunca faz sentido fazer. Tu acabou de criar dois novos nomes para o 0.

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis. (id1) (+1), (−)

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$. Sobgrupo & $(\forall r)[rI \subseteq I]$ $(\forall r)[Ir \subseteq I]$

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE I1 .

toda essa parte era gratuita pela teoria dos grupos.

Aqui precisa demonstrar que kerφ absorve as multiplicações.

① $\ker\varphi \leq R$

• temos $\ker\varphi \subseteq R$ pois seja $x \in \ker\varphi$, por definição de $\ker\varphi$, $x \in R$.

• id-fechado: como $0_R \in R$ e $\varphi(0_R) = 0_S$ temos $0_R \in \ker\varphi$

• op-fechado: Sejam $x, y \in \ker\varphi$. temos $\varphi x = 0_S$ & $\varphi y = 0_S$

Logo $\varphi(x +_R y) = \varphi x +_S \varphi y = 0_S + 0_S = 0_S$. Logo $x + y \in \ker\varphi$

• neg-fechado: Seja $x \in \ker\varphi$. tome $-x \in R$ tq $\varphi(-x) = -\varphi x$

temos $\varphi(-x) = -0_S$ pois $x \in \ker\varphi$. Como $-0_S = 0_S$

temos $-x \in \ker\varphi$.

(15) **M**

a gente fala « são isomorfos » quando existe isomorfismo mas não « são homomorfos » quando existe homomorfismo.

HW: Por quê?

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ $\mathcal{R}$-módulos. $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são homomorfos se existe $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tq.

$(\forall u, v \in \mathcal{G})\ \varphi(u \oplus_{\mathcal{G}} v) = \varphi u \oplus_{\mathcal{H}} \varphi v$ $\quad \varphi(\mathbb{0}_{\mathcal{G}}) = \mathbb{0}_{\mathcal{H}}$

$(\forall u \in \mathcal{G})\ \varphi(\ominus_{\mathcal{G}} u) = \ominus_{\mathcal{H}} \varphi u$

Assim tu acabou ignorando a parte de "R-módulo" e se importou apenas com a parte "gruposa".

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}^2 \arrow[r, "\oplus_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{H}^2 \arrow[r, "\oplus_{\mathcal{H}}"'] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

juntar em equação [illegible] em $\mathcal{G}$

os r zerinhos [illegible]

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Sejam $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}$ $\mathcal{R}$-módulos e os homomorfismos $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $g : \mathcal{H} \to \mathcal{I}$

$f(g \oplus g') = h \oplus h'$ $(\forall g\, g' \in \mathcal{G})$

$g(h \oplus h') = i \oplus i'$ $(\forall h, h' \in \mathcal{H})$

Logo $f(g \oplus g') = i \oplus i'$

$f(\mathbb{0}_{\mathcal{G}}) = \mathbb{0}_{\mathcal{H}}$

Só isso mesmo.

$(\exists v \in R)(vu = 1)$.

$(\forall a \in R)[(\exists b \in R)(bu = a)]$ $\neg(\exists x \neq 0)[ab = 0] \Leftrightarrow (a\cdot)$ inj

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1, R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE R2.

⇒ Sup. u é R-unit Seja $x \in R$. Logo seja $t \in R$ t.q. $u \cdot t = 1$. Logo $x(u \cdot t) = x \cdot 1$ [Aplicando $(x\cdot)$]. Logo $x(ut) = x$ [id R]. Logo $(xt)u = x$ [An]. Uso xt como testemunho.	⇐ Sup. $(\cdot u)$ é sobrej. [1] Logo seja $r \in R$ t.q. $r \cdot u = 1$! [Aplicando 1 no unit 1]. Uso r como testemunho.

≠ $(u \cdot)t$

X isso não é associatividade

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1, I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker \varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

I ideal R ⟺ I subgrupo ∀ do part aditivo do R.

DEMONSTRAÇÃO DE I1.

Cont op-fechado: $(\forall a, b)[a, b \in \ker\varphi \Rightarrow ab \in \ker\varphi]$. Sejam $a, b \in \ker\varphi$. Logo $\varphi(a) = 0_S = \varphi(b)$ [def. ker] Logo $\varphi(a)\cdot\varphi(b) = \varphi(ab)$ [def. φ] Como $\varphi(a) = 0_S = \varphi(b)$, logo $\varphi(ab) = 0_S$ [$0_S \cdot 0_S = 0_S$]. Logo $ab \in \ker\varphi$	Cont inv-fechado. Seja $x \in \ker\varphi$. Logo $\varphi(x) = 0_S$ [def. ker]. Logo $-\varphi(x) = \varphi(-x)$ [def. φ] Logo $\varphi(-x) = 0_S$ [inv-id]. Logo $-x \in \ker\varphi$ [def φ] Cont id-fechado. Como $\varphi(0_R) = 0_S$ [def. φ]. Logo $0_R \in \ker\varphi$.

a (op) aqui era pra ser a (+)

tudo isso gratuito pelos grupos

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam A, B R-modulos e $\varphi : A \to B$. φ é um homomorfismo de $A \to B$ sse $\varphi(A) \oplus \varphi(B) = \varphi(A \oplus B)$, $\varphi(0_A) = 0_B$, $\varphi(A) \ominus \varphi(B) = \varphi(A \ominus B)$, $\boxed{\varphi \text{ respeita a estrutura do } (\cdot)}$.

essa é a parte essencial aqui para definir — sem gírias!

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação $\boxed{\text{estilo point-free}}$ e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

$(\forall a, b \in R\text{-modulo})[\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$ e $\varphi(0_A) = 0_B$

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\oplus"'] & B \times B \arrow[d, "\oplus"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd}$$

cadê?

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Obj: R-modulo

Arr: homomorfismos entre R-modulos.

$\mathrm{id} : R \to R$

$(\circ) : \mathrm{Arr}(B, C) \times \mathrm{Arr}(A, B) \to \mathrm{Arr}(A, C)$.

Só isso mesmo.

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE R2.

($\Rightarrow$):

Logo, seja v tal que $v \cdot u = 1$.

Seja $r \in R$.

Testemunho rv.

Calc:

$(rv)u = r(vu)$ (ass)

$= r \cdot 1$ (escolha de v)

$= r$ (id·)

($\Leftarrow$):

Logo, seja v tal que $vu = 1$.

Testemunho v.

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$. $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE I1.

One-Test:

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.

Calc:

$\varphi(a + b^{-1}) = \varphi(a) + \varphi(b^{-1})$ (φ resp +)

$= 0 + 0$ (escolha de a, b)

$= 0$ (0; id)

$\vdash (\forall r)[r \ker\varphi \subseteq \ker\varphi]$

Seja $r \in R$.

Seja $k \in \ker\varphi$.

Calc:

$\varphi(rk) = \varphi(r) \cdot \varphi(k)$ (φ resp ·).

$= \varphi(r) \cdot 0$ (escolha de k)

$= 0$ (0 anulador)

$\vdash (\forall r)[\ker\varphi\, r \subseteq \ker\varphi]$

Similar.

Grrratuito grrraças aos grrrupos!

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam A, B R-módulos. Seja $\varphi : A \to B$. Chamamos φ de um homomorfismo entre R-módulos sse φ é um homomorfismo entre as partes aditivas de A e B. #ModuleStructuresMatter

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Só isso mesmo.

(11) R

Escolha exatamente uma das **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE R2.

$r \cdot u = r$

(⇒) Seja $r \in R$. Seja $v \in R$ tq. $vu = 1$. Vou demonstrar que $rvu = r$. Calculamos: $rvu = r1 = r$ ✓	(⇐) Seja $v \in R$ tq $(v \cdot u) = 1$. Imediato. ✓

(11) I

Escolha exatamente uma das **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

I ideal R $\iff$ I subgrupo da parte (+) do R
$(\forall r)[rI \subseteq I]$ &
$(\forall r)[Ir \subseteq I]$

DEMONSTRAÇÃO DE .

(15) M

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam A, B: R-módulos. Seja $\varphi : A \to B$. φ é homomorfismo sse $\varphi \circ (r\,\cdot)$ é um homomorfismo no B; $\varphi(id_A) = id_B$; $(\cdot\, u) = (\cdot\, \varphi(u))$.
? ? ?

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Só isso mesmo.

V

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a \cdot\ )$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\ \cdot u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE .

R1 $\Longrightarrow$

Seja $b, c \in R$ t.q. $ab = ac$ ✓

Queremos $b = c$ ✓

Como a não é L-zero-divisor

$b = c$ [resoluções únicas] (?)

?? mesmo

isso tem muito cara de: « Como [insert hypothesis here], logo [insert goal here]. »

$\Longleftarrow$

Seja $b \in R$ t.q. $ab = a0$

esa parte é essencial aqui.

Logo $b = 0$ [$(a\cdot)$ inj]

Logo a não é um L-zero-divisor

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE .

I1 ...e a parte aditiva??

Seja $k \in \ker\varphi$ e $r \in R$

Queremos $kr \in \ker\varphi$ e $rk \in \ker\varphi$

Calc

$\varphi(kr) = \varphi(k)\cdot\varphi(r)$

$= 0_S \cdot \varphi(r)$ [$k \in \ker\varphi$]

$= 0_S$ [Não sei justificar :((Nem se está certo)]

Demonstre: $0x = 0$ [em qualquer anel].

Similarmente

$\varphi(rk) = 0_S$

Logo $kr, rk \in \ker\varphi$

$\ker\varphi$ é ideal de $\mathcal{R}$

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Homomorfismo de grupos & Respeita a op $(\cdot)$

gratuito

não gratuito.

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Só isso mesmo.

I ideal R $\iff$ I $\trianglelefteq$ R & $(\forall r)[rI \subseteq I]$ & $(\forall r)[Ir \subseteq I]$

(subgrupo da parte aditiva)

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\, u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE R2 .

($\Rightarrow$):

Seja v t.q. $vu = 1$. [u R-unit]
Seja $x \in R$.
Calc:

$(\cdot u)(xv)$ ✓
$= (xv)u$ ✓ Sim!
$= x(vu)$ ✓
$= x\,1$ ✓
$= x$. ✓

($\Leftarrow$):

Seja v t.q. $(\cdot u)v = 1$. [$(\cdot u)$ sobre]
logo $vu = 1$. ✓

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**. ideal (anéis) ⟿ normal (grupos)

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE I2 .

($\varphi^{-1}[J] \leq_+ R$):
Critério one-test.
($\varphi^{-1}[J]$ habitado):
Temos $\varphi 0 = 0$. [φ homo]
Como $J \leq_+ \cancel{R}$ S, logo $0 \in J$. ✓
Logo $\varphi 0 \in J$. ✓
$(\forall x, y \in \varphi^{-1}[J])[x + (-y) \in \varphi^{-1}[J]]$. ✗ +! cuidado!
Sejam $x, y \in \varphi^{-1}[J]$.
Logo $\varphi x, \varphi y \in J$.
Logo $\varphi{-y} \in J$. [φ homo]
Logo $\varphi x \varphi{-y} \in J$. [$\varphi$ homo]
Logo $\varphi x(-y) \in J$. [φ homo]

($\varphi^{-1}[J]$ absorve as multiplicações):
$(\forall r)[r(\varphi^{-1}[J]) \cancel{=} \varphi^{-1}[J]]$: $\subseteq$!
Seja $r \in R$.
($\subseteq$):
Seja x t.q. $\varphi x \in J$.
Temos $\varphi r \in S$.
Logo $(\varphi r)(\varphi x) \in J$. [J absorve]
Logo $\varphi r x \in J$. [φ homo.
~~($\supseteq$): Seja x t.q. $\varphi x \in J$.~~
~~Temos $\varphi r^{-1} x \in J$.~~
~~Temos $r r^{-1} x = x$.~~
✓

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam R anel, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ R-módulo e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Dizemos que φ é homomorfismo se preserva a parte grupo abeliana e a $(\cdot)$. —sem gírias!!

(5 + 5) (Sábio) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Só isso mesmo.

(11) R *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit ssc $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE .

(11) I *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE I1 .

Preciso demonstrar fechado pela subtração & zero absorve.
& habitado!

Sejam $k, k' \in \ker\varphi$.

$$\begin{aligned}\varphi(k-k') &= \varphi k - \varphi k' \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \ \checkmark\end{aligned}$$

Sejam $r \in R$ & $k \in \ker\varphi$.

$$\begin{aligned}\varphi(rk) &= \varphi r \varphi k \\ &= \varphi r 0 \\ &= 0 \ \checkmark\end{aligned}$$

O lado $\varphi(kr)$ é similar. ✓

(15) M

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Só isso mesmo.

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\cdot\, u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE R2 .

($\Leftarrow$)
Seja v t.q $1 = vu$. [$(\cdot u)$ sobre]
Logo u é R-Unit. [Testemunha é v]

($\Rightarrow$)
Seja v t.q $vu = 1$. [u R-unit]
Seja $r \in R$. Temos $r = r \cdot 1$. [1 $(\cdot)$-id]
Logo $r = r \cdot (vu)$
Logo $r = (rv) \cdot u$. [Assoc-$(\cdot)$]
Testemunho $(r \cdot v)$! ☒

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker \varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE I2 .

Seja J ideal de S.
$\boxed{\varphi^{-1}[J] \leq (R,+,0,-)}$
Como φ respeita a estrutura aditiva. Então $\varphi^{-1}[J] \leq (R,+,0,-)$ [φ homo] (*)

Seja $r \in R$ e i t.q $\varphi i \in J$. Queremos $\varphi(ri) \in J$ e $\varphi(ir) \in J$.
Temos que $\varphi(ri) = \varphi(r) \cdot \varphi(i)$ [φ homo]
Como $\varphi(i) \in J$ então $\varphi(r) \cdot \varphi(i) \in J$ [J ideal]. Logo $\varphi(ri) \in J$.
Similarmente temos $\varphi(ir) \in J$ ☒

demonstramos mesmo?

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam U, V R-módulos dizemos que $\varphi : U \to V$ é um homomorfismo sse: φ é um homomorfismo entre os grupos abelianos de U e V e $(\forall r \in R)[\varphi(r \cdot u) = r \cdot (\varphi u)]$

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

$\varphi(r \cdot (u + u')) = r \cdot ((\varphi u) + (\varphi u'))$

$$\begin{tikzcd}
U \times U \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "+"'] & V \times V \arrow[r, "+"] & V \arrow[d, "(r\cdot)"] \\
U \arrow[r, "(r\cdot)"'] & U \arrow[r, "\varphi"'] & V
\end{tikzcd}$$

$\varphi(r \cdot u + s \cdot v) = ?$

como andar aqui se $r \neq s$?

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

$\mathrm{Id}(r \cdot u) = r \cdot u = r \cdot \mathrm{Id}(u)$

Basta 1_U é homo
$(\circ)$ preservam homos

$(\varphi \circ \psi)(r \cdot u) = \varphi(\psi(r \cdot u))$
$= \varphi(r \cdot (\psi u))$ [ψ homo]
$= r \cdot (\varphi(\psi u))$ [φ homo]
$= r \cdot ((\varphi \circ \psi) u)$ ☒

Só isso mesmo.