FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova IEA.3
(points: 37; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome:

2023-07-05

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Esclarecimento. Escreva suas demonstrações e definições em linguagem "high-level" sem comprometer rigor, clareza, e corretude. Escreva em texto compilável em português matemático, sem depender de conhecimento de gírias matemáticas.

Presente. Para esta prova consideramos que teu leitor—e tu—conhecem bem teoria dos grupos. Tudo que definimos/demonstramos sobre grupos é considerado conhecido e utilizável sem definir/demonstrar.

Definição 1. Fixe $\mathcal{R} = (R; +, 0, -, \cdot, 1)$ um anel. Um $\mathcal{R}$-*módulo (esquerdo)* é um grupo abeliano $\mathcal{G} = (G; \oplus, \mathbf{0}, \ominus)$ munido com uma operação $(\boldsymbol{\cdot}) : R \times G \to G$ que é compatível com as estruturas, i.e.:
(i) para todo $r \in R$, $(r\,\boldsymbol{\cdot}\,) : G \to G$ é um endomorfismo de grupos:

$$r \boldsymbol{\cdot} (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} \oplus r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}; \qquad r \boldsymbol{\cdot} \mathbf{0} = \mathbf{0}; \qquad r \boldsymbol{\cdot} (\ominus \boldsymbol{u}) = \ominus (r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u});$$

(ii) para todo $u \in G$, $(\,\boldsymbol{\cdot}\, u) : R \to G$ é um homomorfismo da parte aditiva do $\mathcal{R}$ para o $\mathcal{G}$:

$$(r + s) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} \oplus s \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}; \qquad 0 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = \mathbf{0}; \qquad (-r) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = \ominus (r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u});$$

(iii) "associatividade" e "identidade":

$$(rs) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = r \boldsymbol{\cdot} (s \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}); \qquad 1 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

Um sábio disse: *Pensando na currificação $R \times G \to G \cong R \to (G \to G)$, podemos considerar que um $\mathcal{R}$-módulo $\mathcal{G}$, ganha, além da sua estrutura de grupo abeliano, uma R-família de operações unárias, uma para cada $r \in R$. Em vez de vê-lo como $(\mathcal{G}; \boldsymbol{\cdot})$, podemos vê-lo como $(\mathcal{G}\,;\,((r\,\boldsymbol{\cdot}\,))_{r \in R})$.*

Definição 2. Sejam $\mathcal{R}$ um anel e $a \in R$. Definimos: a é um *L-zero-divisor* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\exists b \neq 0)\,[\,ab = 0\,]$.

Definição 3. Sejam $\mathcal{R}$ um anel e $u \in R$. Chamamos o u de *L-unit* sse existe v tal que $uv = 1$; de *R-unit* sse existe v tal que $vu = 1$; e de *unit* (ou *invertível*) sse u é L-unit e R-unit. (Obs: o conjunto de todos os units de $\mathcal{R}$ forma um grupo com a multiplicação do $\mathcal{R}$, que denotamos por $\mathcal{R}^\times$.)

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(11) **R** *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

Demonstração de ______ .

(11) **I** *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker\varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

Demonstração de ______ .

(15) **M**

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

Definição.

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

Equação e diagrama comutativo.

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

Verificação.

Obs: aqui "pontos" são apenas os habitantes do nosso mundinho ($\mathcal{G}$), não os $r$zinhos do R.

Só isso mesmo.

Rascunho