FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova IEA.3
(points: 37; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-07-05

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Esclarecimento. Escreva suas demonstrações e definições em linguagem "high-level" sem comprometer rigor, clareza, e corretude. Escreva em texto compilável em português matemático, sem depender de conhecimento de gírias matemáticas.

Presente. Para esta prova consideramos que teu leitor—e tu—conhecem bem teoria dos grupos. Tudo que definimos/demonstramos sobre grupos é considerado conhecido e utilizável sem definir/demonstrar.

Definição 1. Fixe $\mathcal{R} = (R; +, 0, -, \cdot, 1)$ um anel. Um $\mathcal{R}$-*módulo (esquerdo)* é um grupo abeliano $\mathcal{G} = (G; \oplus, \mathbf{0}, \ominus)$ munido com uma operação $(\boldsymbol{\cdot}) : R \times G \to G$ que é compatível com as estruturas, i.e.:
(i) para todo $r \in R$, $(r\,\boldsymbol{\cdot}\,) : G \to G$ é um endomorfismo de grupos:

$$r \boldsymbol{\cdot} (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} \oplus r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}; \qquad r \boldsymbol{\cdot} \mathbf{0} = \mathbf{0}; \qquad r \boldsymbol{\cdot} (\ominus \boldsymbol{u}) = \ominus (r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u});$$

(ii) para todo $u \in G$, $(\,\boldsymbol{\cdot}\, u) : R \to G$ é um homomorfismo da parte aditiva do $\mathcal{R}$ para o $\mathcal{G}$:

$$(r + s) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} \oplus s \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}; \qquad 0 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = \mathbf{0}; \qquad (-r) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = \ominus (r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u});$$

(iii) "associatividade" e "identidade":

$$(rs) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = r \boldsymbol{\cdot} (s \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}); \qquad 1 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

Um sábio disse: *Pensando na currificação $R \times G \to G \cong R \to (G \to G)$, podemos considerar que um $\mathcal{R}$-módulo $\mathcal{G}$, ganha, além da sua estrutura de grupo abeliano, uma R-família de operações unárias, uma para cada $r \in R$. Em vez de vê-lo como $(\mathcal{G}; \boldsymbol{\cdot})$, podemos vê-lo como $(\mathcal{G}\,;\,((r\,\boldsymbol{\cdot}\,))_{r \in R})$.*

Definição 2. Sejam $\mathcal{R}$ um anel e $a \in R$. Definimos: a é um *L-zero-divisor* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\exists b \neq 0)\,[\,ab = 0\,]$.

Definição 3. Sejam $\mathcal{R}$ um anel e $u \in R$. Chamamos o u de *L-unit* sse existe v tal que $uv = 1$; de *R-unit* sse existe v tal que $vu = 1$; e de *unit* (ou *invertível*) sse u é L-unit e R-unit. (Obs: o conjunto de todos os units de $\mathcal{R}$ forma um grupo com a multiplicação do $\mathcal{R}$, que denotamos por $\mathcal{R}^\times$.)

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(11) R — *Escolha exatamente uma das* **R1**, **R2**.

(8) **R1.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $a \in R$. Logo a não é um L-zero-divisor sse $(a\,\cdot\,)$ é injetiva.

(11) **R2.** Sejam $\mathcal{R}$ anel e $u \in R$. Logo u é um R-unit sse $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO DE AMBAS .

R1. $(\Rightarrow)$ Sejam b, c tais que $ab = ac$. Logo $ab - ac = 0$. Logo $a(b - c) = 0$. Logo $b - c = 0$. Logo $b = c$.
$(\Leftarrow)$ Seja $b \neq 0$ tal que $ab = 0$. Mas $a0 = 0$ também, e logo $b = 0$ (pela injetividade da $(a\,\cdot))$ contradizendo a escolha de b.

R2. $(\Rightarrow)$ Seja v tal que $vu = 1$. Para mostrar que $(\,\cdot\,u)$ é sobrejetiva basta achar uma seção dela.
Demonstrarei que $(\,\cdot\,v)$ é uma seção da $(\,\cdot\,u)$.
Seja $r \in R$.
Calculamos: $((\,\cdot\,u) \circ (\,\cdot\,v))\,r = (\,\cdot\,u)(rv) = (rv)u = r(vu) = r1 = r$.
$(\Leftarrow)$ Seja v tal que $(\,\cdot\,u)v = 1$, ou seja $vu = 1$, e logo u é um R-unit.

(11) I — *Escolha exatamente uma das* **I1**, **I2**.

Seja $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis.

(8) **I1.** $\ker \varphi$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

(11) **I2.** φ *reflete* os ideais, i.e., que para todo ideal J de $\mathcal{S}$, $\varphi^{-1}[J]$ é um ideal de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DE AMBAS .

I1. Já temos $\ker \varphi \trianglelefteq (R; +, 0, -)$ e logo basta mostrar que $\ker \varphi$ absorve as multiplicações.
Sejam $r \in R$, $k \in \ker \varphi$. Calculamos: $\varphi(rk) = (\varphi r)(\varphi k) = (\varphi r)0_{\mathcal{S}} = 0_{\mathcal{S}}$.

ALTERNATIVAMENTE: Imediato pela **I2** tomando $J := \{0_{\mathcal{S}}\}$.

I2. Seja J ideal de $\mathcal{S}$.
Basta mostrar que $\varphi^{-1}[J]$: (i) é habitado; (ii) é fechado pela subtração; (iii) absorve a multiplicação.
(i) Como $\varphi\, 0_R = 0_S$, logo $0_R \in \varphi^{-1}[J]$ e logo é habitado.
(ii) Sejam $i, i' \in R$ tais que $\varphi\, i = 0_S = \varphi\, i'$.
Calculamos: $\varphi(i - i') = (\varphi\, i) - (\varphi\, i') \in J$ pois J é ideal e logo $i - i' \in \varphi^{-1}[J]$.
(iii) Sejam $r \in R$ e $i \in \varphi^{-1}[J]$.
Calculamos: $\varphi(ri) = (\varphi\, r)(\varphi\, i) \in J$ pois $\varphi\, i \in J$ e J absorve multiplicações no $\mathcal{S}$.

(15) M

(5) **M1.** Defina homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos.

DEFINIÇÃO.

Sejam $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ $\mathcal{R}$-módulos. Uma função $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo sse:
φ é um homomorfismo do grupo abeliano $\mathcal{G}$ para o grupo abeliano $\mathcal{H}$ [basta: $\varphi\,(\boldsymbol{u} \oplus_G \boldsymbol{v}) = (\varphi\,\boldsymbol{u}) \oplus_H (\varphi\,\boldsymbol{v})$];
φ respeita todos os $(r\,\boldsymbol{\cdot})$: $\varphi(r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}) = r \boldsymbol{\cdot} (\varphi\,\boldsymbol{u})$.

(5 + 5) **M2.** Adivinha uma única "equação" que serviria como critério de homomorfismo entre $\mathcal{R}$-módulos. Escreva essa equação estilo point-free, e a acompanhe com o diagrama comutativo correspondente.

EQUAÇÃO E DIAGRAMA COMUTATIVO.

$$(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{G})\,[\,\varphi\,((r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}) \oplus_G (s \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v})) = (r \boldsymbol{\cdot} (\varphi\,\boldsymbol{u})) \oplus_H (s \boldsymbol{\cdot} (\varphi\,\boldsymbol{v}))\,]$$

$$\varphi \circ (\oplus_G) \circ ((r\,\boldsymbol{\cdot}) \times (s\,\boldsymbol{\cdot})) \;=\; (\oplus_H) \circ ((r\,\boldsymbol{\cdot}) \times (s\,\boldsymbol{\cdot})) \circ (\varphi \times \varphi)$$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "(r\,\boldsymbol{\cdot}) \times (s\,\boldsymbol{\cdot})"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"] & G \times G \arrow[r, "(\otimes_G)"] & G \arrow[d, "\varphi"'] \\
H \times H \arrow[r, "(r\,\boldsymbol{\cdot}) \times (s\,\boldsymbol{\cdot})"] & H \times H \arrow[r, "(\otimes_H)"] & H
\end{tikzcd}$$

M3. Considerando como objetos os $\mathcal{R}$-módulos e como setas teus homomorfismos do **M1**, verifique que eles formam uma categoria, onde identidades são as identidades e composições as composições—duh!

VERIFICAÇÃO.

Basta verificar que identidades são homos e que composição de homos é homo. A **M1**.(i) já verificamos (**Grp**). A **M1**.(ii):

$G \xrightarrow{\mathrm{id}} G$

$\mathrm{id}\,(r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u})$
$= r \boldsymbol{\cdot} (\mathrm{id}\,\boldsymbol{u})$.

$G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\varphi} K$

$(\varphi \circ \psi)\,(r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u})$
$= \varphi\,(\psi\,(r \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u}))$
$= \varphi\,(r \boldsymbol{\cdot} (\psi\,\boldsymbol{u}))$
$= r \boldsymbol{\cdot} (\varphi\,(\psi\,\boldsymbol{u}))$
$= r \boldsymbol{\cdot} ((\varphi \circ \psi)\,\boldsymbol{u})$.

Obs: aqui "pontos" são apenas os habitantes do nosso mundinho ($\mathcal{G}$), não os $r$zinhos do R.

Só isso mesmo.