(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1, C2, C3, C4.**

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[a \approx gag^{-1}]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE 24 ← muito foco nos pontos, hein?

assim são arbitrários e com certeza não vão ajudar.

($\Leftarrow$):
($\approx$) compatível c/ op:
sejam $a,b,c,d \in G$.
suponha $a \approx b$ e $c \approx d$.
sejam $g \in G$ t.q. $a = gbg^{-1}$
e $g' \in G$ t.q. $c = g'dg'^{-1}$.

o g' foi uma escolha de nome ruim aqui (devido os $^{-1}$).

Calc,
$ac = gbg^{-1}g'dg'^{-1}$
$= gbg'g^{-1}dg'^{-1}$
$= gg'bdg^{-1}g'^{-1}$
$= gg'bd(g'g)^{-1}$
$= gg'bd(gg')^{-1}$ $\square$

complicou demais

($\approx$) compatível c/ inv
sejam $a,b \in G$.
suponha $a \approx b$
Logo, seja $g : G$ t.q.
$a = gbg^{-1}$.
Calc,
$a^{-1} = (gbg^{-1})^{-1}$
$= (g^{-1})^{-1}b^{-1}g^{-1}$ [inv prod] ✓
$= gb^{-1}g^{-1}$ $\square$

($\approx$) compatível c/ id
imediato. [($\approx$) é rel equivalência] $\blacksquare$

($\Rightarrow$):
sejam $a,b \in G$.
~~calc,~~ sejam $g, g', h, h' : G$.
~~ab:~~ Calc,
$ab = g'gabg^{-1}g'^{-1}$ [C3] ✗
$= (g'g)ab(g'g)^{-1}$ ✗
$ba = h'hbah^{-1}h'^{-1}$?
$= (h'h)ba(h'h)^{-1}$
Logo $ab \approx ba$ [($\approx$) op] ??
seja $k : G$.
calc,
$ab = kbak^{-1}$

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma função. Definimos a φ homomorfismo por: φ homomorfismo $\overset{\text{def.}}{\iff}$ φ respeita op
φ respeita id

compilável sem gírias!!

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

(φ resp op)

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\cdot_M"] \arrow[d, "\varphi^2"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ N \times N \arrow[r, "\cdot_N"'] & N \end{tikzcd}$$ ✓

(φ resp id)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "id_M"] \arrow[dr, "?"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.
Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

suponha φ sobrejetiva e respeita op.
(φ resp op)
imediato.
(φ resp id)
sejam $m \in M$, $n \in N$ t.q. $\varphi(m) = n$
Calc, o que é isso?
$\varphi(m) \cdot \varphi(m^{-1}) = \varphi(mm^{-1})$ [φ resp op]
$= \varphi(e_M)$
?
$\varphi(m) \cdot \varphi(m)^{-1} = n \cdot (n)^{-1}$
$= e_N$

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\left[a \approx gag^{-1}\right]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4 .

($\Rightarrow$):

Suponha que $(\approx)$ é uma congruência.

Sejam $a, b \in G$.

($\Leftarrow$):

Suponha que G é abeliano.

($\approx$ respeita e):

Imediato. [$\approx$ reflexiva]

($\approx$ respeita inv):

Sejam $a, b \in G$ t.q $a \approx b$.

Seja g t.q $a = gbg^{-1}$.

Logo $a = b$. [G abel]

Logo $a^{-1} = b^{-1}$.

Logo $a^{-1} \approx b^{-1}$ [$\approx$ reflexiva]

($\approx$ respeita op):

Sejam a, b, c, d t.q $a \approx b$ e $c \approx d$.

Sejam g, h t.q $a = gbg^{-1}$ e $c = hdh^{-1}$.

Basta (!) demonstrar $ac = e(bd)e^{-1}$.

Calculamos: $ac = gbg^{-1}hdh^{-1}$

$= gg^{-1}bd\,hh^{-1}$ [abel]

$= e\,bd\,e$

$= e\,bd\,e^{-1}$. ∎

complicou demais

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: monóides e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, φ é um homomorfismo sse φ respeita a estrutura de monóides, ou seja, $[\varphi(e_A) = e_B]$ & $(\forall a, a')[\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')]$.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

φ respeita a id

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "e_M"] \arrow[d, "e_N"'] & \\ N & M \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

φ respeita a op

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "op"'] & N \times N \arrow[d, "op"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha φ sobrejetiva e respeita a op.

(φ resp id):

Seja m t.q $\varphi(m) = e_N$. [φ sobre]

Temos $\varphi(me_M) = \varphi(m)\varphi(e_M)$ [φ resp op]

Logo $\varphi(m) = e_N \cdot \varphi(e_M)$.

Logo $e_N = \varphi(e_M)$. ∎

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[a \approx gag^{-1}]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE ____ .

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

conjunto?!

Sejam M, N monóides, φ é um homomorfismo $M \to N$ se

Respeita a (id): $\varphi(e_M) = e_N$ & Respeita a op: $\{x, y \in M \mid \varphi(x \underset{op_M}{\cdot} y) = \varphi(x) \underset{op_N}{\cdot} \varphi(y)$

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "(op)_M"'] & N \times N \arrow[d, "(op)_N"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

φ homomorfismo $\Rightarrow$ Resp(id) & Resp(op)

Resp(op): Imediat ✓

Seja $u, v \in M$ t.q. $\varphi(uv) = e_N$ × Qual ∃ nos dados te permite escrever essa linha?

Logo $\varphi(u) \cdot \varphi(v) = e_N$

Logo $\varphi(u) = \varphi(v) = e_N$ ×

o que aconteceu aqui?

(14) **D** *Escolha exatamente uma das* **D1**, **D2**, **D3**, **D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.
(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.
(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\mathrm{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.
(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

DEMONSTRAÇÃO DE D2 .

($\leq$)
fechado (OP)
Sejam $x, y \in \ker\varphi$
Logo $\varphi x \cdot \varphi y = e_B$ [escolha de x e y] [pulou]
Logo $\varphi(xy) = e_B$ [φ homo]
Logo $xy \in \ker\varphi$
e o (inv)-fechado?

($\trianglelefteq$) Sejam $k \in \ker\varphi$ e $a \in A$
Logo $\varphi(aka^{-1}) = \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a)^{-1}$ [φ homo] [pulou]
$= \varphi(a)\, e_B\, \varphi(a)^{-1}$ [escolha do k]
$= \varphi(a)\varphi(a)^{-1}$
$= e_B$
Logo $aka^{-1} \in \ker\varphi$ ✓

(21) **S** *Escolha exatamente uma das* **S2**, **S3**, **S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.
DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.
Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^{\triangledown}$ (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_{\vartriangle}$ (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A \rangle^{\triangledown} \leq M$. **S3.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} \leq M$. **S4.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} = \langle A \rangle^{\triangledown}$.
DEMONSTRAÇÃO DE ____ .

Só isso mesmo.

Sejam $x, y \in M$ tq $xy = e$ $\quad (\forall a, b \in M)[ab = e \Rightarrow a = b = e]$

hw: Ache contraexemplo.

Calc $xy = xye$
$= x$?!

$xy = exy$
$= y$?!

Logo $x = y = e$?!!

14 9   125 16   41 209

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1, C2, C3, C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\left[a \approx gag^{-1}\right]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

Demonstração de _____ .

L. $a.b = ba$

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

Definição.

Sejam M, N monoides. Seja $\varphi : M \to N$. Dizemos que φ é homomorfismo sse φ respeita a estrutura do M no N. Ou seja: φ respeita a op: $(\forall a, b \in M)[\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)]$ e φ respeita a id: $\varphi(1_m) = 1_n$.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

Diagramas.

φ respeita op:

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "op"'] & N \times N \arrow[d, "op"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

φ respeita id

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & N \arrow[d, "id_n"] \\ & N \end{tikzcd}$$

?

SERÁ??

nope!

$id_N \circ \varphi = \varphi$

Tu queria: $\varphi(e_M) = e_N$.

H2. Demonstre o seguinte critérion.
Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

Demonstração.

Sup. φ sobrejetiva e φ resp op.

Conta φ respeita op.

Imediato.

Conta φ respeita id. $\boxed{\varphi(1_m) = 1_n}$

pelo menos use : ou (..) pois apenas escrevendo isso parece que tu tá afirmando

ALVO!

Temos ~~Logo~~ $1_n \in N$. [N monoide].

Logo seja $a \in M$ t.q. $\varphi(a) = 1_n$ [φ sobrejetiva].

Temos ~~Logo~~ $1_m \in M$. [M monoide].

Logo $\varphi(a) = \varphi(a \cdot 1_m)$ [M-id]

$e_N =$

$= \varphi(a) \cdot \varphi(1_m)$ [φ respeita op].

$= 1_n \cdot \varphi(1_m)$ [escolha de a]

$= \varphi(1_m)$. [N-id]

~~Logo $\varphi(a) = \varphi(1_m)$. [escolha de a]~~

~~Logo $\varphi(1_m) = 1_n$. [escolha de a]~~

confuso!

Que tal ...

$(\forall x \in \ker\varphi)(\forall g \in \mathscr{A})[$
$g x g^{-1} \in \ker\varphi$.
$\varphi(g x g^{-1}) = 1_{\mathscr{B}}$

(14) **D**

Escolha exatamente uma das **D1**, **D2**, **D3**, **D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$. 14

(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$. $\rightsquigarrow \{a \in \mathscr{A} \mid \varphi(a) = 1_{\mathscr{B}}\}$.

(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\operatorname{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.

(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

$ab \in \ker\varphi \rightsquigarrow \varphi(ab) = 1_{\mathscr{B}}$

DEMONSTRAÇÃO DE D2.

Cont: $\ker\varphi < \mathscr{A}$.

Cont id.

Como $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ e $\varphi(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$, logo $1_{\mathscr{A}} \in \ker\varphi$. [$\varphi$ respeita id]

Cont $\boxed{\text{ONE-TEST}}$ cadê?

Sejam $a, b \in \ker\varphi$.

Logo $\varphi(a) = 1_{\mathscr{B}}$ e $\varphi(b) = 1_{\mathscr{B}}$ [escolha dos a,b]

Calculamos:

$\varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$ [φ respeita op]
$= 1_{\mathscr{B}} \cdot 1_{\mathscr{B}}$ [escolha dos a,b]
$= 1_{\mathscr{B}}$ [id]

isso foi o (op)-fechado.

Faltou o (inv)-fechado ou o

Cont: $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.

Sejam $x \in \ker\varphi$ e $g \in \mathscr{A}$.

Logo $\varphi(x) = 1_{\mathscr{B}}$.

Basta demonstrar que $\varphi(g x g^{-1}) = 1_{\mathscr{B}}$

Calculamos:

$\varphi(g x g^{-1}) = \varphi(g)\cdot\varphi(x g^{-1})$ [φ respeita op]
$= \varphi(g)\cdot\varphi(x)\cdot\varphi(g^{-1})$ [φ respeita op]
$= \varphi(g)\cdot 1_{\mathscr{B}}\cdot\varphi(g^{-1})$ [escolha de x]
$= \varphi(g)\cdot\varphi(g^{-1})$ [id]
$= \varphi(g)\cdot(\varphi(g))^{-1}$ [φ respeita inv].
$= 1_{\mathscr{B}}$. [inv]

(21) **S**

Escolha exatamente uma das **S2**, **S3**, **S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.
Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^{\triangledown}$ (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_{\vartriangle}$ (BOTTOM-UP).

(8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A \rangle^{\triangledown} \leq M$. **S3.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} \leq M$. **S4.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} = \langle A \rangle^{\triangledown}$.

DEMONSTRAÇÃO DE ______.

Só isso mesmo.

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1, C2, C3, C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[\,a \approx gag^{-1}\,]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE ____ .

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam M e N monoide, $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo se respeita a estrutura de M em N, ou seja: $(\forall a, b \in M)[\varphi(a \cdot_M b) = (\varphi a) \cdot_N (\varphi b)]$

$\varphi(e_M) = e_N$

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

OPERAÇÃO:

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\cdot_M"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ N \times N \arrow[r, "\cdot_N"'] & N \end{tikzcd}$$

IDENTIDADE:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\lambda x.e_M"'] \arrow[dr, "\lambda x.e_N"] \arrow[d, phantom, "//"] & \\ M \arrow[rr, "\varphi"'] & {} & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha φ sobrejetiva & respeita operação

Basta mostrar que φ resp operação e id.

φ resp operação: Imediato

φ resp id: Seja $n \in N$ por quê?, isso é uso de algo o ataque de alvo?

~~Busco~~ $x \in M$ tq. $(\varphi x = e_N$ [φ Sobrejetiva]

ou seja, $n \cdot (\varphi x) = n$

tome $x = e_M$ (...mas não é busca!)

Logo $\varphi(e_M) = e_N$. Como??

«Seja» Tu estaria buscando se esse ∃ fosse teu alvo. Mas é dado que tu tá usando para solicitar tal objeto!

(14) **D** *Escolha exatamente uma das* **D1, D2, D3, D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.
(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.
(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\mathrm{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.
(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

DEMONSTRAÇÃO DE D2.

$\ker\varphi \leq \mathcal{A}$:
Sejam $a, b \in \ker\varphi$.
Utilizando o criterio one test, (precisa verificar $\ker\varphi$ habitado)
basta mostrar que $ab^{-1} \in \ker\varphi$.
calculamos: $\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)(\varphi b^{-1})$ [φ Resp. op]
$= e_B \cdot (\varphi b^{-1})$ [$a \in \ker\varphi$]
$= (\varphi b^{-1})$
$= (\varphi b)^{-1}$ [φ Resp inv]
$= (e_B)^{-1}$ [$b \in \ker\varphi$]
$= e_B$

$\ker\varphi$ fechado sob conjugados:
Sejam $a \in A$ e $k \in \ker\varphi$
Basta mostrar que $aka^{-1} \in \ker\varphi$
calculamos:
$\varphi(aka^{-1}) = (\varphi a)(\varphi k)(\varphi a^{-1})$ [φ Resp. op]
$= (\varphi a)\, e_B (\varphi a^{-1})$ [$k \in \ker\varphi$]
$= (\varphi a)(\varphi a^{-1})$
$= (\varphi a)(\varphi a)^{-1}$ [φ Resp inv]
$= e_B$

(21) **S** *Escolha exatamente uma das* **S2, S3, S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.
DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.
Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^{\triangledown}$ (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_{\vartriangle}$ (BOTTOM-UP).

8|10|12) **S2.** $\langle A \rangle^{\triangledown} \leq M$. **S3.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} \leq M$. **S4.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} = \langle A \rangle^{\triangledown}$.
DEMONSTRAÇÃO DE ____ .

Só isso mesmo.

[One-test]: inv fechado:

Seja $h \in H$

tenho $hh^{-1} \in H$

Logo $h^{-1} \in H$ X Não! (Por quê?)

op-fechado: X depois de «seja», só nome! Aqui tu escreveu termo não-atômico: $\boxed{a^{-1}}$

sejam $a^{-1}, b \in H$

tenho $b^{-1}a^{-1} \in H$

Logo $a\hat{b} \in H$ [inv fechado]

id-fechado:

Seja $h \in H$

tenho $hh^{-1} \in H$ ~~[inv-fechado]~~ não, aqui é a hipotece do one-test.

Logo $e \in H$

Reveja esta demonstração!

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[a \approx gag^{-1}]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

Demonstração de ____ .

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

Definição.

Para todo $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides, $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo sse respeita as estruturas dos monóides. Sem gírias!

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo.

Diagramas.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\lambda x.e_M"'] \arrow[dr, "\lambda x.e_N"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ M \arrow[rr, "?\varphi"'] & & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "op\text{-}M"'] \arrow[dr, phantom, "="] & N \times N \arrow[d, "op\text{-}N"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse $\Leftarrow$ φ é sobrejetiva e respeita a operação.

Demonstração.

Suponha φ sobrejetiva & resp. op.

Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides. ← Agora?

Seja $m \in M$. ← por quê?

Logo, seja $n \in N$ t.q. $\varphi m = n$. ← Qual a utilidade desse novo nome para o φm?

(14) **D** *Escolha exatamente uma das* **D1**, **D2**, **D3**, **D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.
(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.
(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\mathrm{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.
(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

DEMONSTRAÇÃO DE D2 .

Parte ~~que~~ subgrupo.
Por definição ~~de Ker φ~~ temos que Ker φ é ~~subgrupo~~ de $\mathcal{A}$ [subconjunto]
temos que $e_A \in \operatorname{Ker}\varphi \neq \emptyset$.
Logo, sejam $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi$.
calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(ab^{-1}) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) && [\varphi \text{ resp-op}] \\
&= \varphi(a) \cdot (\varphi(b))^{-1} && [\varphi \text{ res-inv.}] \\
&= e_B \cdot e_B^{-1} && [\text{escolha de } a \text{ e } b] \\
&= e_B
\end{aligned}$$

Parte subgrupo normal.
Vou demonstrar que Ker φ é fechado pelos conjugados.
Sejam $a \in A$ & $k \in \operatorname{Ker}\varphi$.
calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) && \left[\begin{matrix}\varphi \text{ res-operação} \\ \& \\ \text{Matematicidade}^{\text{TM}}\end{matrix}\right] \\
&= \varphi(a)\, e_B\, \varphi(a^{-1}) && [\text{escolha de } k] \\
&= \varphi(a)(\varphi(a))^{-1} && [\varphi \text{ resp.-Inv.}] \\
&= e_B
\end{aligned}$$

☺ ✓✓✓

(21) **S** *Escolha exatamente uma das* **S2**, **S3**, **S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.
Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^{\nabla}$ (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_{\Delta}$ (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A \rangle^{\nabla} \leq M$. **S3.** $\langle A \rangle_{\Delta} \leq M$. **S4.** $\langle A \rangle_{\Delta} = \langle A \rangle^{\nabla}$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

$(\forall S \leq G)$

grande
é a intersecção de todos os subconjuntos M tais $A \subseteq M$ &

Só isso mesmo.

$\operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \{a : A \mid \varphi a = e_B\}$

é a união grande de todos os subconjuntos M tais que $A \subseteq M$

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\left[a \approx gag^{-1}\right]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4.

$(\Leftarrow)$

Parte $e \sim e$:
Imediato. [$\sim$ é rel. equi]

Parte $a \sim u \Rightarrow a^{-1} \sim u^{-1}$:
Seja $a, u \in G$ t.q. $a \sim u$.
Seja $g \in G$ t.q $a = gug^{-1}$.
Calculamos.
$a^{-1} = (gug^{-1})^{-1}$ [Escolha do g]
$= (ug^{-1})^{-1} \cdot g^{-1}$ [??]
$= gug^{-1}$.

Parte $a \sim u$ & $b \sim v \Rightarrow ab \sim uv$:
Seja $a, u, b, v \in G$ t.q $a \sim u$ & $b \sim v$.
Logo seja $g, h \in G$ t.q. $a = gug^{-1}$ & $b = hvh^{-1}$.
Calculamos:
$ab = (gug^{-1}) \cdot (hvh^{-1})$
$= (guh)(g^{-1}vh^{-1})$ [G abel]
$= (ghu)(vg^{-1}h^{-1})$ [G abel]
$= (gh)(uv)(h^{-1}g^{-1})$ [G abel]
$= (gh)(uv)(gh)^{-1}$ [inv] ∎

$(\Rightarrow)$
Sejam $a, b \in G$.
Logo $a \approx bab^{-1}$ [C3]
Calculamos: $ab = (bab^{-1})b = bae = ba$.

complicou demais

?

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Seja $\mathcal{M} = (M; \cdot, e)$ um monóide & $\mathcal{N} = (N; \cdot_N, e_N)$ um monóide.
Seja $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.
φ é homomorfismo $\overset{\text{def}}{\iff} \left[(\forall m, m')[\varphi(m \cdot m') = \varphi m \cdot_N \varphi m'] \;\&\; \varphi(e) = e_N\right]$.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e_N"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, phantom, "//"] \\ & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\cdot_M"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ N \times N \arrow[r, "\cdot_N"] & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.
Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo:
φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

Parte $(\forall m, m')[\varphi(m \cdot m') = \varphi m \cdot_N \varphi m']$
Imediato. [φ respeita a operação]

Parte: $\varphi(e) = e_N$.
~~Seja $e_N \in N$. [N monóide]~~ (Faz parte da estrutura!)
Seja $m \in M$ t.q. $\varphi(m) = e_N$. [φ sobre]
Calculamos:
$e_N = \varphi(m) = \varphi(m \cdot e)$
$= \varphi m \cdot \varphi e$ [respeita a OP]
$= e_N \cdot \varphi e$. [Escolha de m]
$= \varphi e$. ∎

começa assim!!

(21) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1, C2, C3, C4.**

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\left[a \approx gag^{-1}\right]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4.

Lemma c Abel

$\Downarrow$

$(\approx) = (=)$

$\uparrow$

$(\Rightarrow)$ C2

$(\Leftarrow)$

(id) $e \approx e$ é imediato pela reflexividade do $(\approx)$.

(inv) Sejam $a, b \in G$, t.q. $a \approx b$. Logo $a = b$ e Portanto $a^{-1} = b^{-1}$. Logo $a^{-1} \approx b^{-1}$

(op) Sejam $a, a', b, b' \in G$ t.q. $a \approx a'$ & $b \approx b'$. Logo $a = a'$ e $b = b'$. Logo $ab = a'b'$. Portanto $ab \approx a'b'$

$(\Rightarrow)$ Basta que toda classe de conjugação é singleton. Seja $g \in G$. Temos $g \in [g]_{\approx}$. Seja $x \in [g]_{\approx}$. Quero $x = g$. Temos $x \approx g$ e $g \approx x$ [Symm]. Logo $xg \approx gx$ [($\approx$)-Cong]. Seja h t.q. $x = hgh^{-1}$. $[x \approx g]$

(2).

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam M, N monóides e seja $\varphi : M \to N$, digamos que φ é homomorfismo sse: $\varphi e_M = e_N$ & $(\forall m, m' \in M)[\varphi(mm') = (\varphi m)(\varphi m')]$

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "e_M"] \arrow[dr, "e_N"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "op"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ N \times N \arrow[r, "op"'] & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.
Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

$(\Leftarrow)$ Basta que φ respeita identidade. Como φ é sobrejetiva, logo seja $x \in M$ t.q. $\varphi x = e_N$.

Calculamos:

$\varphi x = \varphi(e_M \cdot x)$
$= (\varphi e_M)(\varphi x)$ [φ resp. op]
$= (\varphi e_M)$ [$\varphi x = e_N$]

$(e_N \overset{?}{=})$

Logo $\varphi x = \varphi e_M = e_N$. ∎

G Abel $\Rightarrow$ $(\approx) = (=)$

$(\Rightarrow)$

$(\Rightarrow)$

Sejam a, a' t.q. $a \approx a'$.

Logo seja g t.q. $a = g a' g^{-1}$

calculamos:

$$
\begin{aligned}
a &= g a' g^{-1} \\
&= g g^{-1} a' \\
&= a'.
\end{aligned}
$$

✓

$(\Leftarrow)$

Sejam a, a' t.q. $a = a'$.

Logo $a = e a' e^{-1}$.

essa é imediata.

(=) é congruência para toda operação e respeita toda relação.

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1, C2, C3, C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[\,a \approx gag^{-1}\,]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4 .

($\Leftarrow$): ← Complicou demais! Calc:

(id):

Calc:

$e = eee$

$= eee^{-1}$.

(inv):

Sejam x, y t.q. $x \approx y$.

Logo seja g t.q. $x = gyg^{-1}$.

Logo $x^{-1} = ((gy)g^{-1})^{-1}$.

Logo $x^{-1} = g(y^{-1}g^{-1})$.

? tentou deixar mais claro com os parenteses mas acabou deixando confuso!

(op):

Sejam a, u, b, v t.q. $a \approx u$ & $b \approx v$.

Logo sejam g, h t.q. $a = gug^{-1}$ e $b = hvh^{-1}$.

Calc:

$ab = gug^{-1}hvh^{-1}$

$= gg^{-1}uvhh^{-1}$

$= uv$.

$uv = euve^{-1}$. ...

($\Rightarrow$):

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam M, N monóides. Seja $\varphi : M \to N$. Dizemos que φ é homomorfismo de M para N sse $\varphi e_M = e_N$ e $(\forall a, b \in M)[\varphi ab = (\varphi a)(\varphi b)]$ ✓

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Unit} \arrow[dl, "\lambda x.e_M"'] \arrow[dr, "\lambda x.e_N"] & \\ M \arrow[rr, "\varphi"'] & {=} & N \end{tikzcd}$$

✓

e

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "\cancel{\varphi}\ \cdot_M"'] \arrow[dr, phantom, "="] & N \times N \arrow[d, "\cdot_N"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo:

φ homomorfismo ~~s~~se $\Leftarrow$ φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

Sup φ sobre e resp op.

Basta $\varphi e_M = e_N$.

Calc:

as implicitas seriam essas!

$\varphi e_M = (\varphi e_M) e_M \to \varphi(e_M e_M)$

$= (\varphi e_M)(\varphi e_M)$ [φ resp op]

Logo $\varphi e_M = e_N$ [alumpado]

cadê?

(Estamos em monoides!)

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\text{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\left[a \approx gag^{-1}\right]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

$\Rightarrow$):

$\Leftarrow$)

$(\approx)$ - é comp. op

Sejam $a, b, u, v \in G$ tq. $a \approx u$ e $b \approx v$.

Logo, sejam $g, k \in G$ tq. $a = gug^{-1}$ e $b = kvk^{-1}$.

Calc.:

$ab = (gug^{-1})(kvk^{-1})$ [escolha de g, k]

$= gk(uv)(k^{-1}g^{-1})$ [com]

$= gk(uv)(gk)^{-1}$ [inv-prod]. ✓

$(\approx)$ - é comp inv

Sejam $x, y \in G$ tq. $x \approx y$.

Logo, seja $g \in G$ tq. $x = gyg^{-1}$.

Logo, $x^{-1} = (gyg^{-1})^{-1}$ [inv]

Logo, $x^{-1} = gy^{-1}g^{-1}$ [inv-prod; inv-inv]

Logo, $x^{-1} \approx y^{-1}$. ✓

$(\approx)$ é comp id.

Imediato pela ~~sime-tria~~ da $(\approx)$.

refl.

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Seja $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ monóides. Seja $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$.

φ é um homomorfismo sse

$(\forall x, y \in M)[\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)]$ & $\varphi(e_M) = e_{M'}$.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\varphi^2"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
M' \times M' \arrow[r, "\varphi_{M'}"'] & M'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Unit} \arrow[r, "id_M"] \arrow[dr, "id_{M'}"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
 & M'
\end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo:

φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

(14) **D** *Escolha exatamente uma das* **D1**, **D2**, **D3**, **D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.

(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.

(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\mathrm{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.

(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

DEMONSTRAÇÃO DE D2 .

(id)-fechado:

Temos $\varphi(e_A) = e_B \in \ker\varphi$. [$\varphi$ resp. id]

(one-test):

Sejam $x, y \in \ker\varphi$, ou seja $\varphi(x) = e_B$ e $\varphi(y) = e_B$.

Basta demonstrar que $\varphi(xy^{-1}) = e_B$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\varphi(xy^{-1}) &= \varphi(x)\varphi(y^{-1}) && [\varphi \text{ resp. op}] \\
&= e_B\, \varphi(y^{-1}) && [\text{escolha de } x] \\
&= \varphi(y^{-1}) && [\text{id}] \\
&= \varphi(y)^{-1} && [\varphi \text{ res. inv}] \\
&= e_B^{-1} = e_B && [\text{escolha de } y, \text{ inv-id}]
\end{aligned}
$$

Seja $x \in \ker\varphi$.

Seja $a \in A$.

Basta demonstrar que $\varphi(axa^{-1}) = e_B$.

Calc.:

$$
\begin{aligned}
\varphi(axa^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a^{-1}) && [\varphi \text{ resp op}] \\
&= \varphi(a)\, e_B\, \varphi(a^{-1}) && [\text{escolha de } x] \\
&= \varphi(a)\varphi(a^{-1}) && [\text{id}] \\
&= \varphi(aa^{-1}) && [\varphi \text{ resp op}] \\
&= \varphi(e_A) && [\text{inv}] \\
&= \cancel{\varphi}(e_B) && [\varphi \text{ resp id}]
\end{aligned}
$$

(21) **S** *Escolha exatamente uma das* **S2**, **S3**, **S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.

Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^{\triangledown}$ (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_{\vartriangle}$ (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A \rangle^{\triangledown} \leq M$. **S3.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} \leq M$. **S4.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} = \langle A \rangle^{\triangledown}$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

Só isso mesmo.

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[\,a \approx gag^{-1}\,]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

Demonstração de _____ .

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

Definição.

Sejam M, N monóides. Seja $\varphi : M \to N$. Dizemos que a φ é homomorfismo se a φ respeita a estrutura dos monóides. Ou seja: $(\forall m, m' \in M)\,[\varphi(mm') = \varphi m\, \varphi m']$ & $\varphi e_M = e_N$.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

Diagramas.

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "e_M"] \arrow[dr, "e_N"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
 & N
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "op_M"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
N \times N \arrow[r, "op_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

se

Demonstração.

Suponha φ sobrejetiva e φ respeita op.

Parte φ resp Id:

Seja $m \in M$, tal que $\varphi m = e_N$ [φ sobrejetiva].

Calculamos:

$\varphi m\, \varphi e_M = \varphi(m\, e_M)$ [φ resp op]

$= \varphi m$ [M-Id].

$\varphi m\, \varphi e_M = e_N\, \varphi e_M$ [escolha de m]

$= \varphi e_M$ [M-Id].

Logo $\varphi e_M = \varphi m$.

Logo $\varphi e_M = e_N$ [escolha de m].

Parte φ resp op: Imediata.

(14) **D** *Escolha exatamente uma das* **D1**, **D2**, **D3**, **D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.
(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.
(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\mathrm{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.
(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

DEMONSTRAÇÃO DE D2 .

Parte $\ker\varphi \leq \mathscr{A}$:
Id-fechado:
Imediato [φ resp Id]. ✓
One test:
Sejam $x, y \in \ker\varphi$.
Calculamos:
$\varphi(xy^{-1}) = \varphi x\, \varphi y^{-1}$ [φ resp op] ✓
$= \varphi x (\varphi y)^{-1}$ [φ resp inv] ✓
$= e_B e_B^{-1}$ [escolha de x, y]
$= e_B$. ✓

$\ker\varphi$ é fechado pelos conjugados:
Sejam $a \in A$ e $k \in \ker\varphi$.
Calculamos:
$\varphi(aka^{-1}) = \varphi a\, \varphi k\, \varphi a^{-1}$ [φ resp op]
$= \varphi a\, e_B\, \varphi a^{-1}$ [escolha de k]
$= \varphi a\, \varphi a^{-1}$
$= \varphi a (\varphi a)^{-1}$ [φ resp inv]
$= e_B$. ✓

(21) **S** *Escolha exatamente uma das* **S2**, **S3**, **S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

Seja M monóide. Seja $N \subseteq M$. Dizemos que N é submonóide de M se $(\forall n, n' \in N)[nn' \in N]$ & $e_M \in N$.

&!

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.
Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A\rangle^{\triangledown}$ (TOP-DOWN).

$\langle A\rangle^{\triangledown} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\{N \mid N \leq M\}$

DEFINIÇÃO DE $\langle A\rangle_{\vartriangle}$ (BOTTOM-UP).

$\langle A\rangle_{\vartriangle} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup A_n$. $A_n \stackrel{\text{def}}{=}$
$A_0 = A$
$A_n = A_{n-1} \cup \{e\} \cup \{ab \mid a, b \in A_{n-1}\}$

(8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A\rangle^{\triangledown} \leq M$. **S3.** $\langle A\rangle_{\vartriangle} \leq M$. **S4.** $\langle A\rangle_{\vartriangle} = \langle A\rangle^{\triangledown}$.

DEMONSTRAÇÃO DE S4 .

Só isso mesmo.

One test: $(\forall G : \text{grupo})(\forall H \subseteq G)[H\text{-habitado} \ \& \ (\forall x, y \in H)[xy^{-1} \in H] \implies H \leq G]$

Seja G grupo.

Seja $H \subseteq G$, tal que H-habitado & $(\forall x, y \in H)[xy^{-1} \in H]$.

Id-fechado:

- Seja $h \in H$ [H habitado].
- Logo $hh^{-1} \in H$ [hip].
- Logo $e \in H$ [Id].

Inv fechado:

- Seja $h \in H$.
- Logo $eh^{-1} \in H$ [hip].
- Logo $h^{-1} \in H$ [Id].

Op fechado:

- Sejam $x, y \in H$.
- Logo xe^{-1} & $ye^{-1} \in H$ [hip].
- Logo xe & $ye \in H$ [Id-Inv].
- Logo x & $y \in H$ [Id].

Nesta Altura™, não precisava!

(Se fosse só pra esse uso, teria sido mais rápido demonstrar o $\ker \varphi \leq A$ pela definição mesmo!)

Aqui começou supondo $x \in H$ & $y \in H$ e acabou concluindo... $x \in H$ & $y \in H$!

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\left[a \approx gag^{-1}\right]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ monóides. Seja $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Chamamos φ de homomorfismo entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sse φ preserva a estrutura de $\mathcal{M}$, ou seja: $(\forall m, m' \in \mathcal{M})[\varphi(m m') = \varphi(m)\varphi(m')]$ & $\varphi(e_M) = e_N$.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "K_{e'}"] \arrow[d, "K_e"'] & \mathcal{N} \\ \mathcal{M} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$K_e : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$

$K_e \; m = e_{\mathcal{M}}$

$K_{e'} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$

$K_{e'} \; m = e_N$

✓ (veja gabarito também!)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \times \mathcal{M} \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Prod}_m"'] & \mathcal{N} \times \mathcal{N} \arrow[d, "\mathrm{Prod}_n"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

✓

H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo:

φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha que φ é sobrejetiva e respeita a op.

φ respeita a op: imediato.

$\varphi(e_M) = e_N$:

Seja m tal que $\varphi(m) = e_N$. ✓

Calc:

$\varphi(e_M) = \varphi(e_M)\, e_N$ (N id) ✓

$= \varphi(e_M)\, \varphi(m)$ (escolha de m) ✓

$= \varphi(e_M\, m)$ (φ resp op) ✓

$= \varphi(m)$ (M id) ✓

$= e_N$ (escolha de m) ✓

(14) **D** *Escolha exatamente uma das* **D1, D2, D3, D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.
(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker \varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.
(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\mathrm{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.
(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(21) **S** *Escolha exatamente uma das* **S2, S3, S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

Seja $\mathcal{M}$ um monóide. Seja H um subconjunto de $\mathcal{M}$. H é um submonóide de $\mathcal{M}$ sse $e_m \in H$ & $(\forall h, h' \in H)[h \cdot_m h' \in H]$.

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.
Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^{\triangledown}$ (TOP-DOWN).

$\langle A \rangle^{\triangledown} \overset{\text{def}}{=} \bigcap \{ H \supseteq A \mid H \leq \mathcal{M} \}$.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_{\triangle}$ (BOTTOM-UP).

Seja $(A_n)_n$ tal que $A_0 = A$ & $A_n = A_{n-1} \cup \{e_m\} \cup \{a a' \mid a, a' \in A_{n-1}\}$. $\langle A \rangle_{\triangle} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_n A_n$.

(8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A \rangle^{\triangledown} \leq M$. **S3.** $\langle A \rangle_{\triangle} \leq M$. **S4.** $\langle A \rangle_{\triangle} = \langle A \rangle^{\triangledown}$.

DEMONSTRAÇÃO DE S4 .

$(\subseteq)$:

Seja $a \in \langle A \rangle_{\triangle}$. ✓
Logo, seja n tal que $a \in A_n$. ✓
Seja $H \supseteq A$ tal que $H \leq \mathcal{M}$. ✓
Logo, pela (*) $a \in H$.

✓

$(\supseteq)$:

Seja $a \in \langle A \rangle^{\triangledown}$. ✓
Logo, $a \in A$. ✗ como? Isso acontece apenas quando o A é um submonóide de M.
Testemunha 0.
Como $A_0 = A$, logo $a \in A_0$.

✗

Só isso mesmo.

(*) :

Considere o contexto da demonstração! ✓

$[\forall n][A_n \subseteq H]$

indução.

Base:

Como $H \supseteq A$ e $A_0 = A$, logo $A_0 \subseteq H$. ✓

Passo indutivo:

Seja k tal que $A_k \subseteq H$.

Seja $x \in A_{k+1}$. ✓

Caso $x \in \{e_m\}$: imediato. ✓

Caso $x \in \{aa' \mid a, a' \in A_k\}$: ✓

Logo, sejam $a, a' \in A_k$ tais que $x = aa'$.

Pelo (HI) e pelo fato de $H \leq M$, temos que $aa' \in A_k$. ✓

op. fechado

Logo, $x \in A_k$. ✓

Logo, $x \in H$. (HI) ✓

Caso $x \in A_k$:

(Pela H.I.)

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[\,a \approx gag^{-1}\,]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano. C4

DEMONSTRAÇÃO DE C4.

($\Leftarrow$) ~~Suponha que G é abeliano~~

(≈) é compatível com a (id): imediata pela reflexividade da (≈).

~~(≈) é compatível com (inv):~~

Sejam $x, y, g \in G$ tais que $x = gyg^{-1}$.

Calculamos:

$$x^{-1} = (gyg^{-1})^{-1}$$
$$= (gg^{-1}y)^{-1} \quad [G \text{ é abeliano}]$$
$$= (ey)^{-1}$$
$$= y^{-1}$$

complicou!

Logo, pela reflexividade da (≈), temos $x^{-1} \approx y^{-1}$.

(≈) é compatível com a (op):

Sejam $a, a', b, b' \in G$ t.q. $a \approx a'$ e $b \approx b'$.

Logo, seja $g \in G$ t.q. $a = ga'g^{-1}$.

Logo, como G é abeliano, temos $a = gg^{-1}a'$.

Logo, $a = a'$.

Similarmente, temos $b = b'$.

Logo, $ab = a'b'$.

Logo, pela reflexividade da (≈), temos $ab \approx a'b'$.

Q.E.D. ← nope! tinha mais! ((⇒))

φ sobrejetiva $\iff (\forall n)(\exists m)\,[\,m \overset{\varphi}{\mapsto} n\,]$

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam A, B monóides e seja $\varphi : A \to B$. Dizemos que φ é um homomorfismo de A para B sse: $(\forall a, a' \in A)\,[\,\varphi(a \cdot_A a') = (\varphi a) \cdot_B (\varphi a')\,]$ & $\varphi e_A = e_B$.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um homomorfismo.

melhor do que A, B

DIAGRAMAS.

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "op_M"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ N \times N \arrow[r, "op_N"] & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "e_N"] \arrow[dr, "e_M"'] & N \\ & M \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

H2. Demonstre o seguinte critérion.

Sejam $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo:

φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

($\Leftarrow$):

φ respeita a op é imediato.

Como φ é sobrejetiva, seja $m \in M$ t.q. $\varphi m = e_N$.

Calculamos:

$$\varphi m = \varphi(m\, e_M) \quad [\text{id } M]$$
$$= (\varphi m)(\varphi e_M) \quad [\varphi \text{ respeita op}]$$
$$= e_N \cdot \varphi e_M \quad [\text{escolha de } m]$$
$$= \varphi e_M \quad [\text{id } N]$$

Logo, pela escolha de m, temos $e_N = \varphi e_M$.

Q.E.D.

QED (⇒).

(24) **C** *Escolha exatamente uma das* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**.

Seja G um grupo.

(8) **C1.** $\mathrm{Cls}(e) = \{e\}$.

(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.

(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G)\,[a \approx gag^{-1}]$.

(24) **C4.** $(\approx)$ é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C1.

um conjunto é uma prop?

o que é isso?

$\{f \in G \mid e \approx f\} \equiv [\exists g \in G][e = gfg^{-1}]$

$= gg^{-1}f = ef = f$ e pronto.

Seja $g, f \in G$ tal que $e = gfg^{-1}$. Calculemos ✱. Logo $geg^{-1} = gfg^{-1}$ ✱✱

$e = e$ ✱
$= gg^{-1}$
$= (ge)g^{-1}$
$= geg^{-1}$.

$geg^{-1}g = gfg^{-1}g$ (op g pela esquerda) ✱✱
$gee = gfe \quad g^{-1}g = e$
$g^{-1}gee = g^{-1}gfe$ (op g^{-1} pela direita)
$eee = efe \quad g^{-1}g = e$

$eee = efe$??

Pela propriedade das id ?
$e = f$

logo $\mathrm{Cl}_G(e) = \{e\}$

pra que esse passo?

isso é um bocado de proposições.

(21) **H**

(4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

(5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

H2. Demonstre o seguinte critérion.
Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \to N$ uma função. Logo: φ homomorfismo sse φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

(14) **D** *Escolha exatamente uma das* **D1**, **D2**, **D3**, **D4**.

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.
(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker\varphi \trianglelefteq \mathscr{A}$.
(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\mathrm{im}\varphi \leq \mathscr{B}$.
(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a $(\approx)$.

DEMONSTRAÇÃO DE D1 .

o que é isso?!

$[\forall h, h_1 \in H, k, k_2 \in K]\,[hk = k_1 h_1]$.

$hk = k_1 h_1$ *
$hkh_1^{-1} = k_1 e \quad (h_1 h_1^{-1} = e)$
$hh_2k_2 = k_1 \quad (kh_1^{-1} = h_2 k_2)$
$h_3k_2 = k_1 \quad (hh_2 = h_3)$

props secas.

Seja n um natural ??? $h_n \in H$ e $k_n \in K$.
agora seguiremos os calculos* com isso vemos que HK é fechado com a operação, pois podemos aplicar isso* para h também, e por H e K já serem subgrupos, vemos que são fechados op. e id. Então $HK \leq G$

puro handwaving! cuidado!

(21) **S** *Escolha exatamente uma das* **S2**, **S3**, **S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.
DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam $\mathscr{M}$ monóide e $A \subseteq \mathscr{M}$.
Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^{\triangledown}$ (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_{\vartriangle}$ (BOTTOM-UP).

(8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A \rangle^{\triangledown} \leq M$. **S3.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} \leq M$. **S4.** $\langle A \rangle_{\vartriangle} = \langle A \rangle^{\triangledown}$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

Só isso mesmo.