

(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE 24  $\leftarrow$  muito foco nos pontos, hein?

assim são arbitrários e com certeza não vão ajudar.

<p>(<math>\Leftarrow</math>):  <math>(\approx)</math> compatível c/ op:          sejam <math>a, b, c, d \in G</math>.          suponha <math>a \approx b</math> e <math>c \approx d</math>.          sejam <math>g \in G</math> t. q. <math>a = gbg^{-1}</math>          e <math>g' \in G</math> t. q. <math>c = g'dg'^{-1}</math>.          Calc.  <math>ac = gbg^{-1}g'dg'^{-1}</math>  <math>= gbg'g'dg'^{-1}</math>  <math>= gg'b'dg'^{-1}</math>  <math>= gg'bd(g'g')^{-1}</math>  <math>= gg'bd(gg')^{-1}</math> <math>\square</math></p>	<p>(<math>\approx</math>) compatível c/ inv          sejam <math>a, b \in G</math>.          suponha <math>a \approx b</math>.          Logo, seja <math>g: G</math> t. q.  <math>a = gbg^{-1}</math>.          Calc.  <math>a^{-1} = (gbg^{-1})^{-1}</math>  <math>= (g^{-1})^{-1}b^{-1}g^{-1}</math> [inv prod]  <math>= gb^{-1}g^{-1}</math> <math>\square</math></p> <p>(<math>\approx</math>) compatível c/ id          imediato. [<math>(\approx)</math> é rel          equivalência]</p>	<p>(<math>\Rightarrow</math>):          sejam <math>a, b \in G</math>.          este, sejam <math>g, g', h, h' \in G</math>.  <math>ab = \text{calc}</math>,  <math>ab = g'gabg^{-1}g'^{-1}</math> [C3] <math>\times</math>  <math>= (g'g)ab(g'g)^{-1}</math>  <math>ba = h'hbah^{-1}h'^{-1}</math>  <math>= (h'h)ba(h'h)^{-1}</math>          Logo <math>ab \approx ba</math> [<math>(\approx)</math> op] ??          seja <math>k \in G</math>.          calc,  <math>ab = kbak^{-1}</math></p>
---	---	---

o g foi uma escolha de nome ruim aqui (devido os  $^{-1}$ ).

complicou demais

compatível sem gírias!!

(21) H

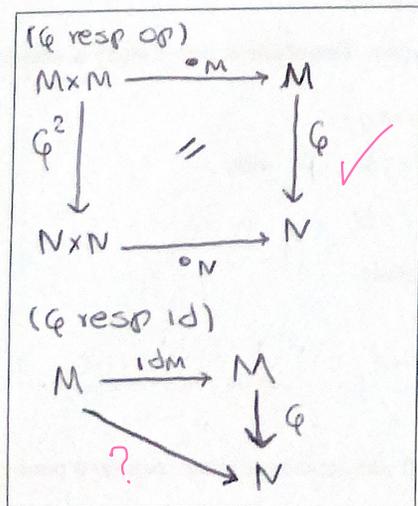
(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

sejam  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  monóides e  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  uma função. Definimos  $\varphi$  homomorfismo por:  $\varphi$  homomorfismo  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \varphi$  respeita op  
 $\varphi$  respeita id

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um homomorfismo. DIAGRAMAS.

H2. Demonstre o seguinte critério. Sejam  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  monóides e  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo se e somente se  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação. DEMONSTRAÇÃO.



suponha  $\varphi$  sobrejetiva e respeita op.

( $\varphi$  resp op)  
 imediato.

( $\varphi$  resp id)  
 sejam  $m \in \mathcal{M}, n \in \mathcal{N}$  t. q.  $\varphi(m) = n$   
 Calc,  
 $\varphi(m) \cdot \varphi(m^{-1}) = \varphi(mm^{-1})$  [ $\varphi$  resp op]  
 $= \varphi(e_{\mathcal{M}})$   
 $\varphi(m) \cdot \varphi(m^{-1}) = n \cdot (n^{-1})$   
 $= e_{\mathcal{N}}$

(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4 .

( $\Rightarrow$ ):  
Suponha que  $(\approx)$  é uma congruência.  
Sejam  $a, b \in G$ .

( $\Leftarrow$ ):  
Suponha que  $G$  é abeliano.  
( $\approx$  respeita  $e$ ):  
Imediato. [ $\approx$  reflexiva] ✓  
( $\approx$  respeita inv):  
Sejam  $a, b \in G$  t.q.  $a \approx b$ . ✓  
Seja  $g$  t.q.  $a = gbg^{-1}$ . ✓  
Logo  $a = b$ . [ $G$  abel] ✓  
Logo  $a^{-1} = b^{-1}$ . ✓  
Logo  $a^{-1} \approx b^{-1}$  [ $\approx$  reflexiva] ✓  
( $\approx$  respeita op):  
Sejam  $a, b, c, d$  t.q.  $a \approx b$  e  $c \approx d$ . ✓  
Sejam  $g, h$  t.q.  $a = gbg^{-1}$  e  $c = hdh^{-1}$ . ✓  
basta demonstrar  $ac = e(bd)e^{-1}$ . ✓  
Calculamos:  $ac = gbg^{-1}hdh^{-1}$ . ✓  
 $= gg^{-1}bdhh^{-1}$  [abel] ✓  
 $= e bde$ . ✓  
 $= e bde^{-1}$ . ✓

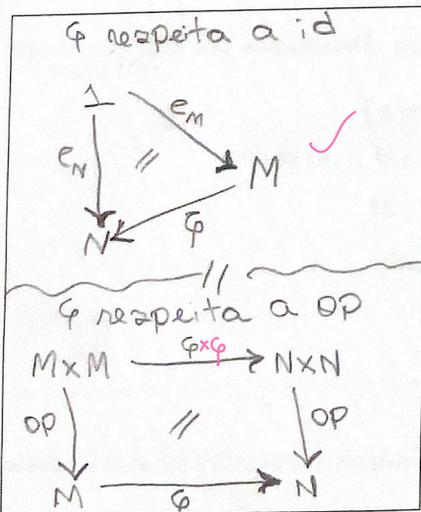
(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $A, B$ : monóides e  $\varphi: A \rightarrow B$ ,  $\varphi$  é um homomorfismo sse  $\varphi$  respeita a estrutura de monóides, ou seja,  
 $[\varphi(e_A) = e_B]$  ✓ &  $(\forall a, a') [\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')]$ . ✓

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo.  
DIAGRAMAS.



H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha  $\varphi$  sobrejetiva e respeita a op. ✓  
 ( $\varphi$  resp id): ✓  
 Seja  $m$  t.q.  $\varphi(m) = e_N$ . [ $\varphi$  sobre] ✓  
 temos  $\varphi(me_m) = \varphi(m)\varphi(e_m)$  [ $\varphi$  resp op] ✓  
 Logo  $\varphi(m) = e_N \cdot \varphi(e_m)$ . ✓  
 Logo  $e_N = \varphi(e_m)$ . ✓

complicou demais

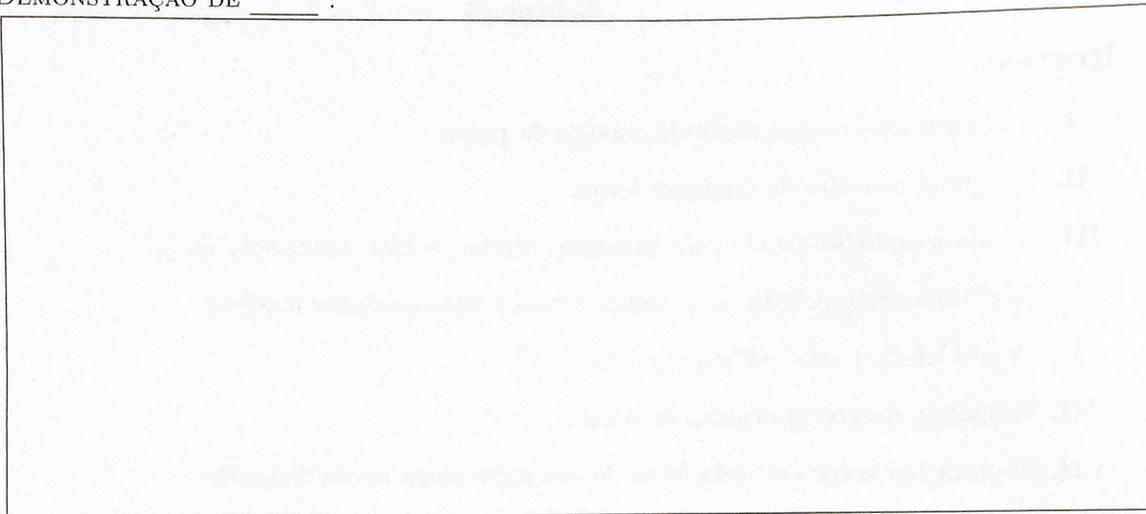
(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_



(21) H

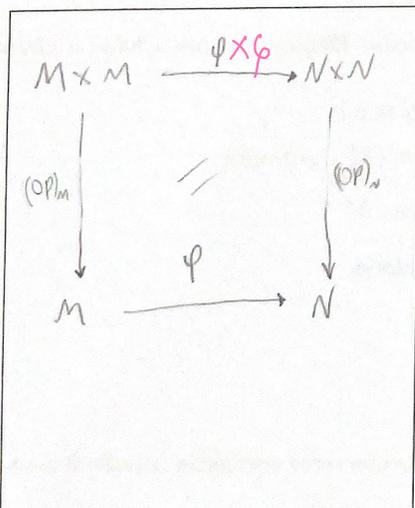
(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $M, N$  monóides,  $\varphi$  é um homomorfismo  $M \rightarrow N$  se  
 Respeita a (id):  $\varphi(e_M) = e_N$  & Respeita a op:  $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

conjunto?!

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo.  
 DIAGRAMAS.



H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.  
 DEMONSTRAÇÃO.

Homomorfismo  $\Rightarrow$  Resp(id) & Resp(op)

Resp(op): imediato ✓

Seja  $u, v \in M$  t.g.  $\varphi(uv) = e_N$  ✗ Qual  $\exists$  nos

Logo  $\varphi(u) \cdot \varphi(v) = e_N$

Logo  $\varphi(u) = \varphi(v) = e_N$  ✗

O que aconteceu aqui?

dados te permite escrever essa linha?

(14) **D**

Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.

- (12) **D1.** Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .  
(14) **D2.** Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .  
(12) **D3.** Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$ .  
(12) **D4.** Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve  $a$  ( $\approx$ ).

DEMONSTRAÇÃO DE D2.

<p>(<math>\subseteq</math>) fechado (OP) Sejam <math>x, y \in \ker \varphi</math> Logo <math>\varphi x \cdot \varphi y = e_B</math> [escalho de <math>x</math> e <math>y</math>] [pulou] Logo <math>\varphi(xy) = e_B</math> [<math>\varphi</math> homo] Logo <math>xy \in \ker \varphi</math> e o (inv)-fechado?</p>	<p>(<math>\trianglelefteq</math>) Sejam <math>K \in \ker \varphi</math> e <math>a \in A</math> Logo <math>\varphi(aka^{-1}) = \varphi(a) \varphi(k) \varphi(a)^{-1}</math> [<math>\varphi</math> homo] [pulou] <math>= \varphi(a) e_B \varphi(a)^{-1}</math> [escalho do <math>k</math>] <math>= \varphi(a) \varphi(a)^{-1}</math> <math>= e_B</math> Logo <math>aka^{-1} \in \ker \varphi</math> ✓</p>
---	---

(21) **S**

Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.

- (3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

- (6) **S1.** Sejam  $\mathcal{M}$  monóide e  $A \subseteq \mathcal{M}$ .

Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq \mathcal{M}$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^\nabla$  (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_\Delta$  (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) **S2.**  $\langle A \rangle^\nabla \leq M$ .

**S3.**  $\langle A \rangle_\Delta \leq M$ .

**S4.**  $\langle A \rangle_\Delta = \langle A \rangle^\nabla$ .

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_.

Só isso mesmo.

LEMMATA

Suppose  $x, y \in M$  s.t.  $xy = e$   $(\forall a, b \in M) [ab = e \Rightarrow a = b = e]$

Calc  $xy = xye$   
 $= x$  ?!

$xy = exy$   
 $= y$  ?!

Logo  $x = y = e$  !!!

↑  
 hw: Ache contraexemplo.

14 q    175  
16    41 20 q

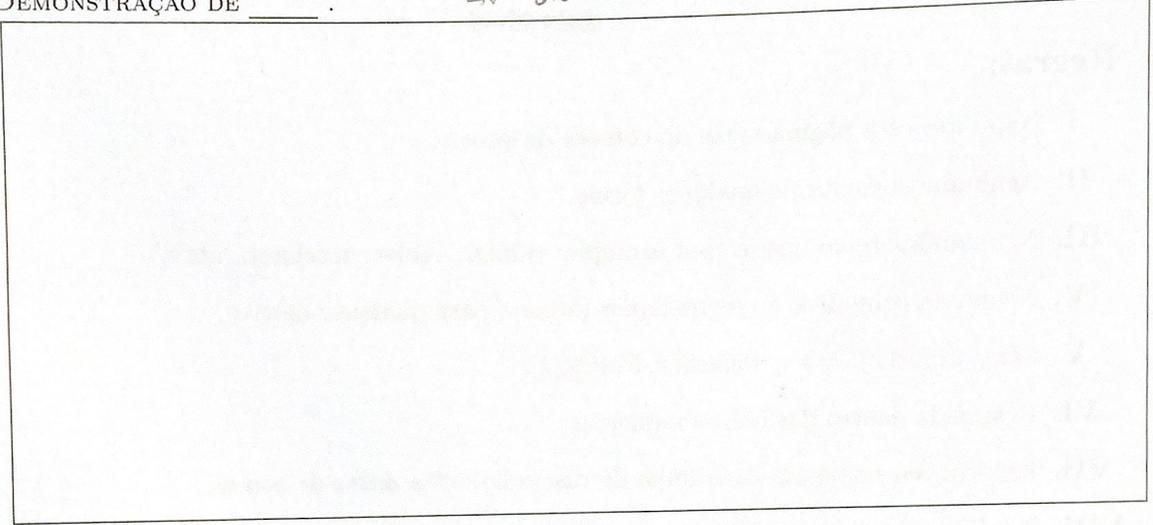
(24) C Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_

$\hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$



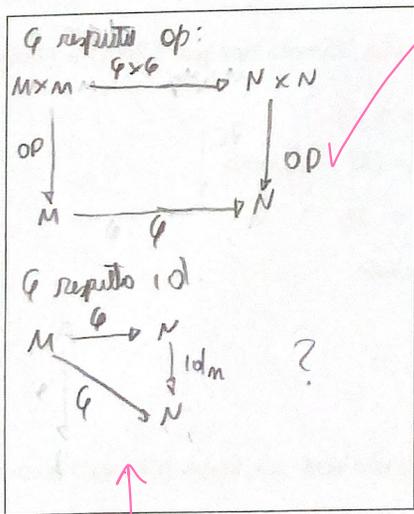
(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $M, N$  monóides. Seja  $\varphi: M \rightarrow N$  qualquer que  $\varphi$  é homomorfismo sse  $\varphi$  respeita a estrutura de  $M$  no  $N$ . Ou seja:  $\varphi$  respeita a op:  $(\forall a, b \in M) [\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)]$  e  $\varphi$  respeita a Id:  $\varphi(1_M) = 1_N$ .

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo. DIAGRAMAS.



H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

Sup.  $\varphi$  sobrejetiva e  $\varphi$  resp op.  
 Coste  $\varphi$  resp op. Imediato.  
 Coste  $\varphi$  resp Id.  $\varphi(1_M) = 1_N$   
 Seja  $1_N \in N$ . [ $N$  monóide].  
 Logo  $\exists a \in M$  t.  $\varphi(a) = 1_N$  [ $\varphi$  sobrejetiva].  
 Logo  $1_M \in M$ . [ $M$  monóide].  
 Logo  $\varphi(1_M) = \varphi(1_M \cdot 1_M)$  [ $M$ -id]  
 $= \varphi(1_M) \cdot \varphi(1_M)$  [ $\varphi$  resp op].  
 $= 1_N \cdot \varphi(1_M)$  [escolha de  $a$ ].  
 $= \varphi(1_M)$  [ $N$ -id]

peço menos use: ou (...) pois apenas escrevendo isso parece que tu tá afirmando

Logo  $\varphi(1_M) = \varphi(1_M)$ . (trivial de  $a$ )  
 Logo  $\varphi(1_M) = 1_N$ . (trivial de  $a$ ) } confuso! Que tal ...

SERÁ??  
 nope!  
 $id_N \circ \varphi = \varphi$   
 Tu queriz:  $\varphi(1_M) = 1_N$ .

$$(\forall x \in \text{Ker } \varphi)(\forall y \in \text{Ker } \varphi) [$$

(14) D Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.

$$g \times g^{-1} \in \text{Ker } \varphi. \quad \varphi(g \times g^{-1}) = 1b$$

(12) D1. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .

(14) D2. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .

(12) D3. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{Im } \varphi \leq \mathcal{B}$ .

(12) D4. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve a  $(\approx)$ .

$$\sim 0 \quad \{0 \in \mathcal{A} \mid \varphi(0) = 1b\}$$

$$0b \in \text{Ker } \varphi \implies \varphi(0b) = 1b$$

DEMONSTRAÇÃO DE D2.

<p>Prova <math>\text{Ker } \varphi \leq \mathcal{A}</math>.</p> <p>Prova Id.</p> <p>Como <math>1a \in \mathcal{A}</math> e <math>\varphi(1a) = 1b</math>, logo <math>1a \in \text{Ker } \varphi</math>. [aproveita id]</p> <p>Prova ONE-TEST <math>\rightarrow</math> cadê?</p> <p>Sejam <math>a, b \in \text{Ker } \varphi</math>.</p> <p>Logo <math>\varphi(a) = 1b</math> e <math>\varphi(b) = 1b</math> [melho do 0b]</p> <p>Calculamos:</p> $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \text{ [aproveita op]}$ $= 1b \cdot 1b \text{ [melho de a, b]}$ $= 1b \text{ [id]}$	<p>Prova <math>\text{Ker } \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}</math>.</p> <p>Sejam <math>x \in \text{Ker } \varphi</math> e <math>g \in \mathcal{A}</math>.</p> <p>Logo <math>\varphi(x) = 1b</math>.</p> <p>Logo demonstrar que <math>\varphi(g \times g^{-1}) = 1b</math></p> <p>Calculamos:</p> $\varphi(g \times g^{-1}) = \varphi(g) \cdot \varphi(g^{-1}) \text{ [aproveita op]}$ $= \varphi(g) \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(g^{-1}) \text{ [aproveita op]}$ $= \varphi(g) \cdot 1b \cdot \varphi(g^{-1}) \text{ [melho de x]}$ $= \varphi(g) \cdot \varphi(g^{-1}) \text{ [id]}$ $= \varphi(g) \cdot (\varphi(g))^{-1} \text{ [aproveita inv]}$ $= 1b \text{ [inv]}$
---	--

(21) S Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.

isso foi o (op)-fechado.  
faltou o (inv)-fechado eu o

(3) S0. Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) S1. Sejam  $\mathcal{M}$  monóide e  $A \subseteq \mathcal{M}$ . Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq \mathcal{M}$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^\nabla$  (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_\Delta$  (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) S2.  $\langle A \rangle^\nabla \leq M$ .

S3.  $\langle A \rangle_\Delta \leq M$ .

S4.  $\langle A \rangle_\Delta = \langle A \rangle^\nabla$ .

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_.

Só isso mesmo.

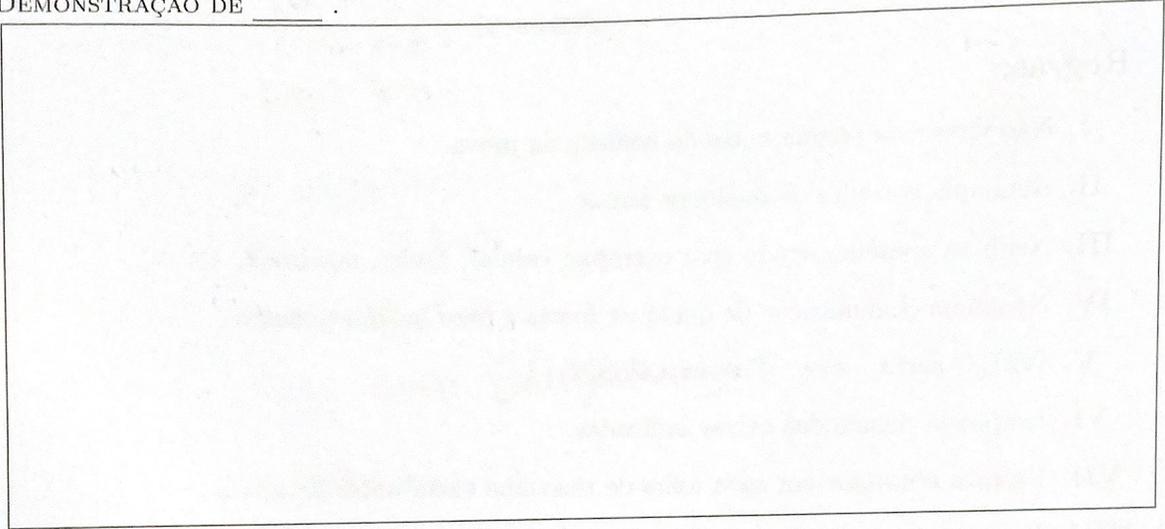
(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_



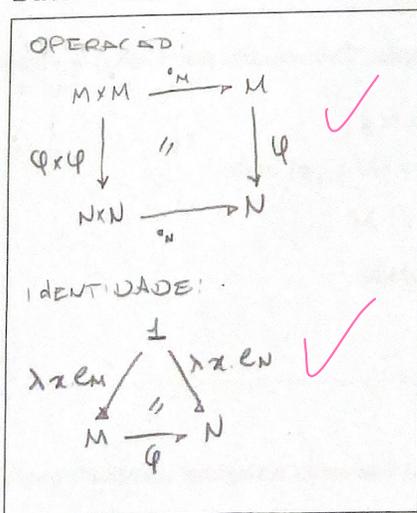
(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $M$  e  $N$  monóides,  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo se respeita a estrutura de  $M$  em  $N$ , ou seja:  $(\forall a, b \in M) [\varphi(a \cdot b) = (\varphi a) \cdot (\varphi b)]$   
 $\varphi(e_M) = e_N$

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo.  
 DIAGRAMAS.



H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.  
 DEMONSTRAÇÃO.

Suponha  $\varphi$  sobrejetiva & respeita operação  
 Basta mostrar que  $\varphi$  resp operação e Id.  
 $\varphi$  resp operação: Imediato ✓

$\varphi$  resp id: Seja  $n \in N$  ← por quê? isso é uso de algo o ataque de alvo?  
~~Basta~~  $x \in M$  tq.  $\varphi x = e_N$  [q sobrejetiva]  
 ou neg,  $n(\varphi x) = n$   
 tome  $x = e_M$  ← (...mas não é busca!)  
 Logo  $\varphi(e_M) = e_N$ . Como?

«Seja» Tu estaria buscando se esse  $\exists$  fosse teu alvo. Mas é dado que tu té usando para solicitar tal objeto!

(14) D

Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.

(12) D1. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .

(14) D2. Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .

(12) D3. Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$ .

(12) D4. Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve a  $(\approx)$ .

DEMONSTRAÇÃO DE D2.

<p><math>\ker \varphi \leq \mathcal{A}</math></p> <p>Sejam <math>a, b \in \ker \varphi</math>.</p> <p>Utilizando o critério one test, basta mostrar que <math>ab^{-1} \in \ker \varphi</math>.</p> <p>calculamos: <math>\varphi(ab^{-1}) = (\varphi a)(\varphi b^{-1})</math> [<math>\varphi</math> resp. op]</p> <p><math>= e_{\mathcal{B}} \cdot (\varphi b^{-1})</math> [<math>a \in \ker \varphi</math>]</p> <p><math>= (\varphi b^{-1})</math> ✓</p> <p><math>= (\varphi b)^{-1}</math> [<math>\varphi</math> resp inv] ✓</p> <p><math>= (e_{\mathcal{B}})^{-1}</math> [<math>b \in \ker \varphi</math>]</p> <p><math>= e_{\mathcal{B}}</math> ✓</p>	<p><math>\ker \varphi</math> fechado sob conjugados:</p> <p>Sejam <math>a \in \mathcal{A}</math> e <math>k \in \ker \varphi</math></p> <p>Basta mostrar que <math>aka^{-1} \in \ker \varphi</math></p> <p>calculamos:</p> <p><math>\varphi(aka^{-1}) = (\varphi a)(\varphi k)(\varphi a^{-1})</math> [<math>\varphi</math> resp op]</p> <p><math>= (\varphi a) e_{\mathcal{B}} (\varphi a^{-1})</math> [<math>k \in \ker \varphi</math>]</p> <p><math>= (\varphi a)(\varphi a^{-1})</math></p> <p><math>= (\varphi a)(\varphi a)^{-1}</math> [<math>\varphi</math> resp inv]</p> <p><math>= e_{\mathcal{B}}</math></p>
---	--

*precisa verificar se  $\ker \varphi$  é habitual*

(21) S

Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.

(3) S0. Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) S1. Sejam  $\mathcal{M}$  monóide e  $A \subseteq \mathcal{M}$ .

Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq \mathcal{M}$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^{\nabla}$  (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_{\Delta}$  (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) S2.  $\langle A \rangle^{\nabla} \leq M$ .

S3.  $\langle A \rangle_{\Delta} \leq M$ .

S4.  $\langle A \rangle_{\Delta} = \langle A \rangle^{\nabla}$ .

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_.

Só isso mesmo.

[One-test]: inv fechado:

Seja  $h \in H$

tenho  $h' \in H$

Logo  $h' \in H$  X Não! (Por quê?)

op- fechado:

Sejam  $\bar{a} \in B$  e  $H$

tenho  $B \rightarrow O' \in H$

Logo  $ab \in H$  [inv fechado]

depois de «seja», só nome!

Aqui tu escreveu termo não-atômico:  $\bar{a}$

id- fechado:

Seja  $h \in H$

tenho  $h' \in H$  [~~inv- fechado~~]

Logo  $e \in H$

não, aqui é a hipótese do one-test.

Reveja esta demonstração!

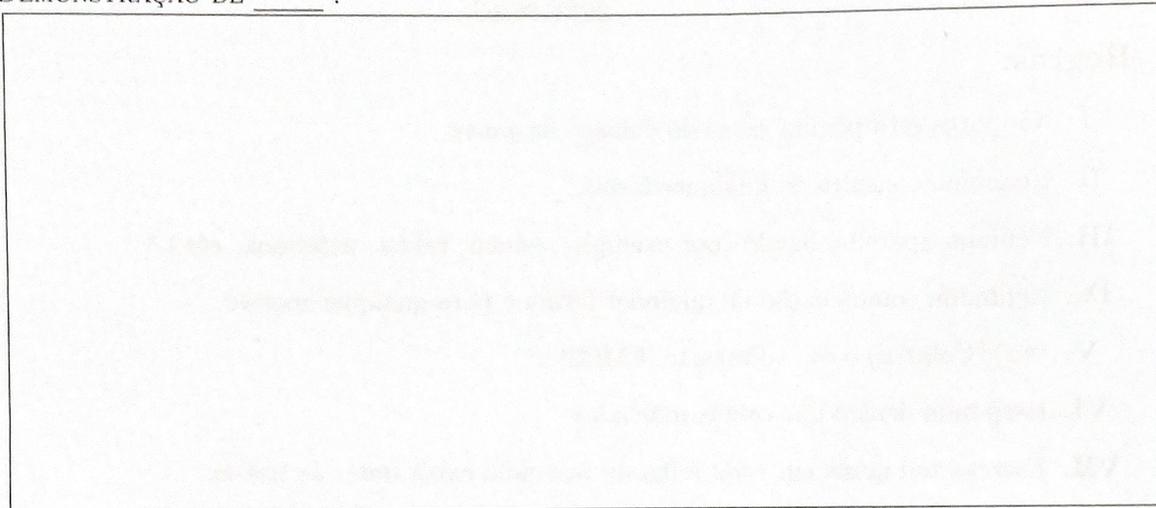
(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .  
(16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.  
(8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .  
(24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_



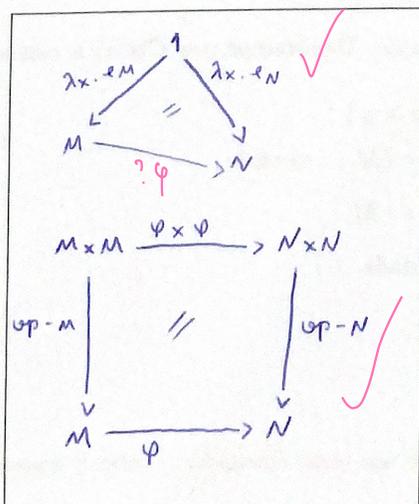
(21) H

- (4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Para todo  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  monóides,  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um homomorfismo sse respeita as estruturas dos monóides. *Sem gírias!*

- (5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um homomorfismo. DIAGRAMAS.



- H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  monóides e  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação. DEMONSTRAÇÃO.  $\Leftarrow$

Suponha  $\varphi$  sobrejetiva & resp. - op.

Sejam  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  monóides. *← Agora?*

Seja  $m \in \mathcal{M}$ . *← por quê?*

Logo, seja  $n \in \mathcal{N}$  t.q.  $\varphi m = n$ . *← Qual a utilidade desse novo nome para o  $\varphi m$ ?*

(14) **D**

Escolha exatamente uma das **D1, D2, D3, D4**.

(12) **D1.** Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .

(14) **D2.** Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .

(12) **D3.** Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$ .

(12) **D4.** Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve  $a$  ( $\approx$ ).

DEMONSTRAÇÃO DE **D2**.

<p>Para <del>prova</del> subgrupo:</p> <p>Por definição de <del>ker</del> <math>\ker \varphi</math> temos que <math>\ker \varphi</math> é <del>subgrupo</del> subconjunto de <math>\mathcal{A}</math> [subconjunto] temos que <math>\emptyset \neq \ker \varphi \neq \mathcal{A}</math>.</p> <p>Logo, sejam <math>a, b \in \ker \varphi</math>.</p> <p>calculamos:</p> $\begin{aligned} \varphi(ab^{-1}) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) \text{ [}\varphi \text{ resp. -op]} \\ &= \varphi(a) \cdot (\varphi(b))^{-1} \text{ [}\varphi \text{ resp. -inv.]} \\ &= \epsilon_{\mathcal{B}} \cdot \epsilon_{\mathcal{B}}^{-1} \text{ [escolha de } a+b\text{]} \\ &= \epsilon_{\mathcal{B}} \end{aligned}$	<p>Para subgrupo normal.</p> <p>Vou demonstrar que <math>\ker \varphi</math> é fechado pelos conjugados.</p> <p>Sejam <math>a \in \mathcal{A}</math> &amp; <math>k \in \ker \varphi</math>.</p> <p>calculamos:</p> $\begin{aligned} \varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) \text{ [}\varphi \text{ resp. -operação]} \\ &= \varphi(a)\epsilon_{\mathcal{B}}\varphi(a^{-1}) \text{ [escolha de } k\text{]} \\ &= \varphi(a)(\varphi(a))^{-1} \text{ [}\varphi \text{ resp. -Inv.]} \\ &= \epsilon_{\mathcal{B}} \end{aligned}$
---	---

(21) **S**

Escolha exatamente uma das **S2, S3, S4**.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam  $\mathcal{M}$  monóide e  $A \subseteq \mathcal{M}$ .

Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq \mathcal{M}$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^{\nabla}$  (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_{\Delta}$  (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) **S2.**  $\langle A \rangle^{\nabla} \leq M$ .

**S3.**  $\langle A \rangle_{\Delta} \leq M$ .

**S4.**  $\langle A \rangle_{\Delta} = \langle A \rangle^{\nabla}$ .

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_.

$$\ker \varphi \subseteq \{a \in \mathcal{A} \mid \varphi a = \epsilon_{\mathcal{B}}\}$$

(V.S.G)

grande  
é a interseção de todos os subconjuntos  $M$  tais  
 $A \subseteq M$

Só isso mesmo.

é a união grande de todos os subconjuntos  $M$  tais  
que  $A \subseteq M$

(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4.

Parte  $e \sim e$ :  
Imediato. [é sub. equi]

Parte  $a \sim u \Rightarrow a^{-1} \sim u^{-1}$ :  
Seja  $a, u \in G$  t. q.  $a \sim u$ .  
Seja  $g \in G$  t. q.  $a = gug^{-1}$ .  
Calculamos:  
 $a^{-1} = (gug^{-1})^{-1}$  [Escalho de]

Parte  $a \sim u$  &  $b \sim v \Rightarrow ab \sim uv$ :  
Seja  $a, u, b, v \in G$  t. q.  $a \sim u$  &  $b \sim v$ .  
Calculamos:  $ab = (gug^{-1})(hvh^{-1})$

Logo seja  $g, h \in G$  t. q.  $a = gug^{-1}$  &  $b = hvh^{-1}$ .  
Calculamos:  
 $ab = (gug^{-1})(hvh^{-1})$   
 $= (guh)(g^{-1}vh^{-1})$  [G abel]

Sejam  $a, b \in G$ .  
Logo:  $a^{-1} \sim b^{-1}$  [C3].  
Calculamos:  $ab = (bab^{-1})b = ba = ba$ .

*complicado demais*

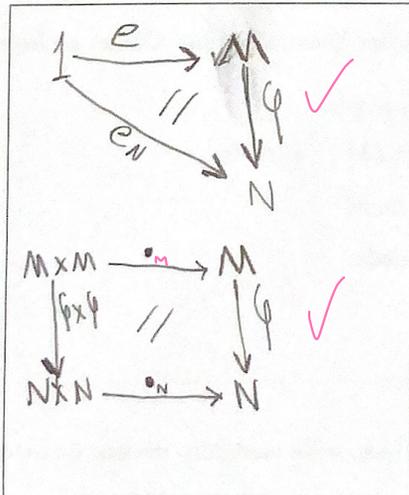
(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Seja  $\mathcal{M} = (M; \cdot, e)$  um monóide &  $\mathcal{N} = (N; \cdot, e_N)$  um monóide.  
Seja  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ .  
 $\varphi$  é homomorfismo de monóides  $\Leftrightarrow (\forall m, m') [\varphi(m \cdot m') = \varphi(m) \cdot \varphi(m')] \text{ e } \varphi(e) = e_N$ .

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um homomorfismo.  
DIAGRAMAS.



H2. Demonstre o seguinte critério.  
Sejam  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  monóides e  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.  
DEMONSTRAÇÃO.

Parte (Homom)  $[\varphi(m \cdot m') = \varphi(m) \cdot \varphi(m')]$   
Imediato. [ $\varphi$  respeita a operação]

Parte:  $\varphi(e) = e_N$ .  
Seja  $e \in \mathcal{M}$ . [ $\mathcal{M}$  monóide] (Faz parte da estrutura!)  
Seja  $m \in \mathcal{M}$  t. q.  $\varphi(m) = e_N$ . [ $\varphi$  sobrejetiva]

Calculamos:  
 $e_N = \varphi(m) = \varphi(m \cdot e)$   
 $= \varphi(m) \cdot \varphi(e)$  [respeito a OP]  
 $= e_N \cdot \varphi(e)$  [Escalho de m]  
 $= \varphi(e)$ .

*começa assim!!*

(21) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE (4)

Lemma  
 $C \text{ Abelian}$   
 $\Downarrow$   
 $(\Leftarrow) = (\Rightarrow)$   
 $\uparrow$   
 $(\Rightarrow) C2$

<p><math>(\Leftarrow)</math>  <math>a \approx e \approx e</math> é imediato pela reflexividade do <math>(\approx)</math>. ✓</p> <p>(implicação)          Sejam <math>a, b, c, d, g</math> s.t. <math>a \approx b</math>. Logo <math>a = b</math> e portanto <math>a^{-1} = b^{-1}</math>.          Logo <math>a^{-1} \approx b^{-1}</math>. ✓</p> <p>(OP)          Sejam <math>a, a', b, b' \in G</math> s.t. <math>a \approx a'</math> &amp; <math>b \approx b'</math>. Logo <math>a = a'</math> e <math>b = b'</math>.          Logo <math>ab = a'b'</math>. Portanto <math>ab \approx a'b'</math>.</p>	<p><math>(\Rightarrow)</math> Basta que toda classe de conjugação é singleton. sse <math>g \in G</math>, temos <math>g \in [g]_g</math>.          Seja <math>x \in [g]_g</math>. Ou seja <math>x = g</math>.          Temos <math>x \approx g</math> e <math>g \approx x</math> [symm]. Logo <math>xg \approx gx</math>.  <math>[xg] = [gx]</math>.          Seja <math>h</math> s.t. <math>x = hgh^{-1}</math>. <math>[x \approx g]</math></p> <p style="text-align: center;">☹</p>
---	--

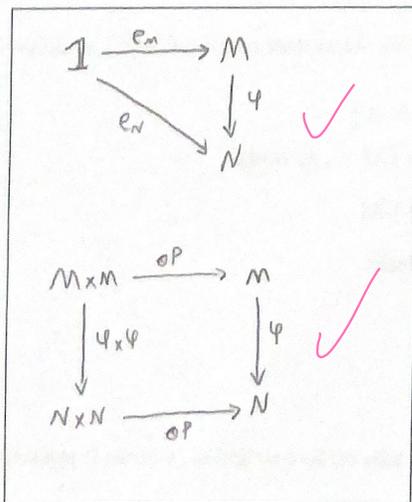
(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $M, N$  monóides e seja  $\varphi: M \rightarrow N$ , digamos que  $\varphi$  é homomorfismo sse:  $\varphi e_M = e_N$  &  $(\forall m, m' \in M) [\varphi(mm') = (\varphi m)(\varphi m')]$

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo.  
 DIAGRAMAS.



H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.  
 DEMONSTRAÇÃO.

$(\Leftarrow)$  Basta que  $\varphi$  respeite identidade. (Como  $\varphi$  é sobrejetiva, logo seja  $x \in M$  s.t.  $\varphi x = e_N$ .  
 Calculamos:  $\varphi x = \varphi(e_M \cdot x)$   
 $= (\varphi e_M)(\varphi x)$  [resp. op]  
 $= (\varphi e_M)$  [  $\varphi x = e_N$  ]  
 Logo  $\varphi x = \varphi e_M = e_N$ .

LEMMATA

$G \text{ Abelian} \Rightarrow (\approx) = (=)$

$(\Rightarrow)$

$(\Rightarrow)$  Sejam  $a, a'$  d.  $g$   $a \approx a'$ .

Logo seja  $u$  d.  $g$   $u = g a' g^{-1}$

calculamos:

$$u = g a' g^{-1}$$

$$= g g^{-1} a'$$

$$= a' \quad \checkmark$$

$(\Leftarrow)$

Sejam  $a, a'$  d.  $g$   $a = a'$ .

Logo  $a = e a' e^{-1}$ .



essa é imediata.

$(=)$  é congruência para toda operação e respeita toda relação.

(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4

$(\Leftarrow)$ : *Complicou demais!* Calc:  $ab = gag^{-1}hvh^{-1} = gag^{-1}uh^{-1} = uv = euv e^{-1} \dots$

(id): Calc:  $e = eee = eee^{-1}$

(inv): Sejam  $x, y \in G$  tal que  $x \approx y$ . Logo seja  $g \in G$  tal que  $x = gyg^{-1}$ . Logo  $x^{-1} = (gyg^{-1})^{-1}$ . Logo  $x^{-1} = g(y^{-1}g^{-1})$ . *tentou deixar as parenteses mas acabou deixando confuso!*

(op): Sejam  $a, u, b, v \in G$  tal que  $a \approx u$  e  $b \approx v$ . Logo sejam  $g, h \in G$  tal que  $a = gug^{-1}$  e  $b = hvh^{-1}$ .

(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

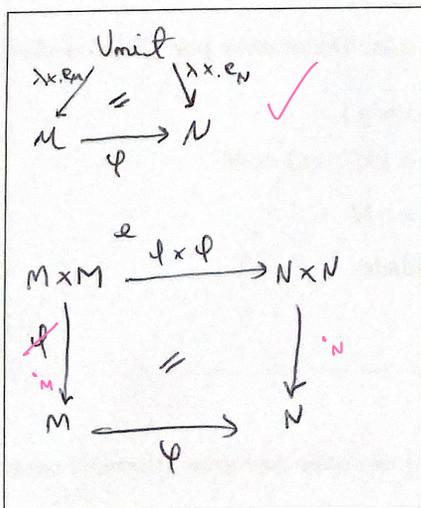
DEFINIÇÃO.

Sejam  $M, N$  monóides. Seja  $\varphi: M \rightarrow N$ . Dizemos que  $\varphi$  é homomorfismo de  $M$  para  $N$  sse  $\varphi e_M = e_N$  e  $(\forall a, b \in M) [\varphi ab = (\varphi a)(\varphi b)]$

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo. DIAGRAMAS.

H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação. DEMONSTRAÇÃO.



Sup  $\varphi$  sobre e resp op. Basta  $\varphi e_M = e_N$ . Calc:  $\varphi e_M = (\varphi e_M) e_M \rightarrow \varphi(e_M e_M) = (\varphi e_M)(\varphi e_M)$  [ $\varphi$  resp op] logo  $\varphi e_M = e_N$  [abreviado]

*as implícitas seriam essas!*

cade? (Estamos em monóides!)

(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_

$\Rightarrow$ :	$\Leftarrow$ $(\approx)$ - é comp. op sejam $a, b, u, v \in G$ tq. $a \approx u$ e $b \approx v$ . logo, sejam $g, k \in G$ tq. $a = gu g^{-1}$ e $b = kv k^{-1}$ . Calc: $ab = (gu g^{-1})(kv k^{-1})$ [escolho de $g, k$ ] $= gk(uv)(k^{-1}g^{-1})$ [com] $= gk(uv)(gk)^{-1}$ [inv-prod]. ✓
	$(\approx)$ - é comp. inv sejam $x, y \in G$ tq. $x \approx y$ . logo, sep $g \in G$ tq. $x = gy g^{-1}$ . logo, $x^{-1} = (gy g^{-1})^{-1}$ [inv] $\text{logo } a, x^{-1} = g y^{-1} g^{-1}$ [inv-prod; inv-inv] logo, $x^{-1} \approx y^{-1}$ . ✓

$(\approx)$  é comp id.  
 Imediato pela simetria de  $(\approx)$ .  
 refl.

(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

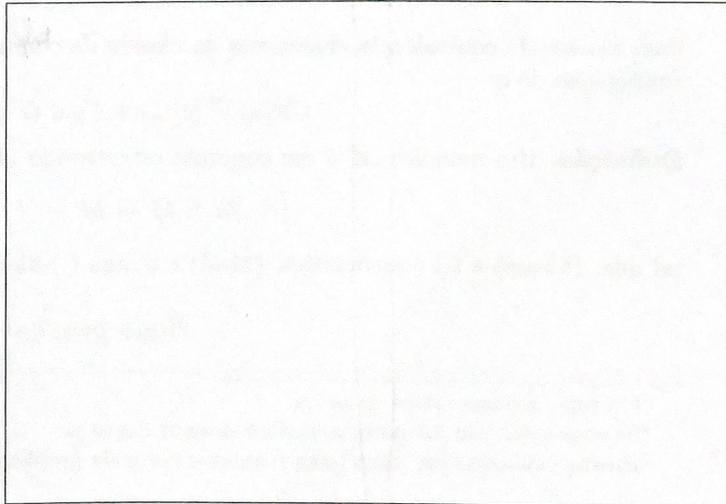
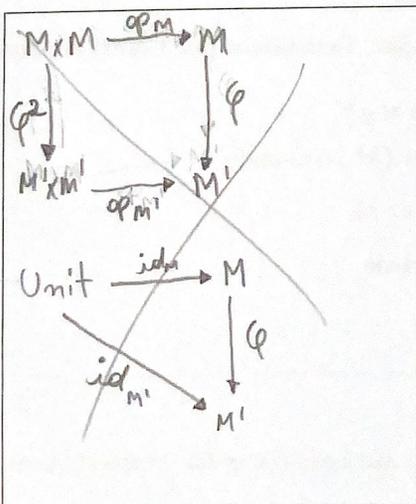
DEFINIÇÃO.

Seja  $M, M'$  monóides. Seja  $\varphi: M \rightarrow M'$ .  
 $\varphi$  é um homomorfismo sse  
 $(\forall x, y \in M) [\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)]$  &  $\varphi(e_M) = e_{M'}$ .

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo.  
 DIAGRAMAS.

H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.  
 DEMONSTRAÇÃO.



(14) D

Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.

(12) D1. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .

(14) D2. Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .

(12) D3. Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$ .

(12) D4. Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve  $a \approx b$ .

DEMONSTRAÇÃO DE D2.

<p>(id) - checkado:  <math>\checkmark</math> Temos <math>\varphi(e_A) = e_B \in \ker \varphi</math>. [q resp. id]          (one-test): <math>\checkmark</math>          Sejam <math>x, y \in \ker \varphi</math>, ou seja <math>\varphi(x) = e_B</math>          e <math>\varphi(y) = e_B</math>.          Basta demonstrar que <math>\varphi(xy^{-1}) = e_B</math>.          Calculamos:  <math>\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y^{-1})</math> [q resp. op]  <math>= e_B \varphi(y^{-1})</math> [escolha de x]  <math>= \varphi(y^{-1})</math> [id]  <math>= \varphi(y)^{-1}</math> [q resp. inv]  <math>= e_B^{-1} = e_B</math> [escolha de y, inv-id]</p>	<p>Seja <math>x \in \ker \varphi</math>.          Seja <math>a \in A</math>.          Basta demonstrar que <math>\varphi(axa^{-1}) = e_B</math>.          Calc:  <math>\varphi(axa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(x)\varphi(a^{-1})</math> [q resp op]  <math>= \varphi(a)e_B\varphi(a^{-1})</math> [escolha de x]  <math>= \varphi(a)\varphi(a^{-1})</math> [id]  <math>= \varphi(aa^{-1})</math> [q resp op]  <math>= \varphi(e_A)</math> [inv]  <math>= \varphi(e_B)</math> [q resp id]</p>
---	---

(21) S

Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.

(3) S0. Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) S1. Sejam  $\mathcal{M}$  monóide e  $A \subseteq \mathcal{M}$ .

Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq \mathcal{M}$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^\nabla$  (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_\Delta$  (BOTTOM-UP).

8 | 10 | 12) S2.  $\langle A \rangle^\nabla \leq M$ .

S3.  $\langle A \rangle_\Delta \leq M$ .

S4.  $\langle A \rangle_\Delta = \langle A \rangle^\nabla$ .

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_.

Só isso mesmo.

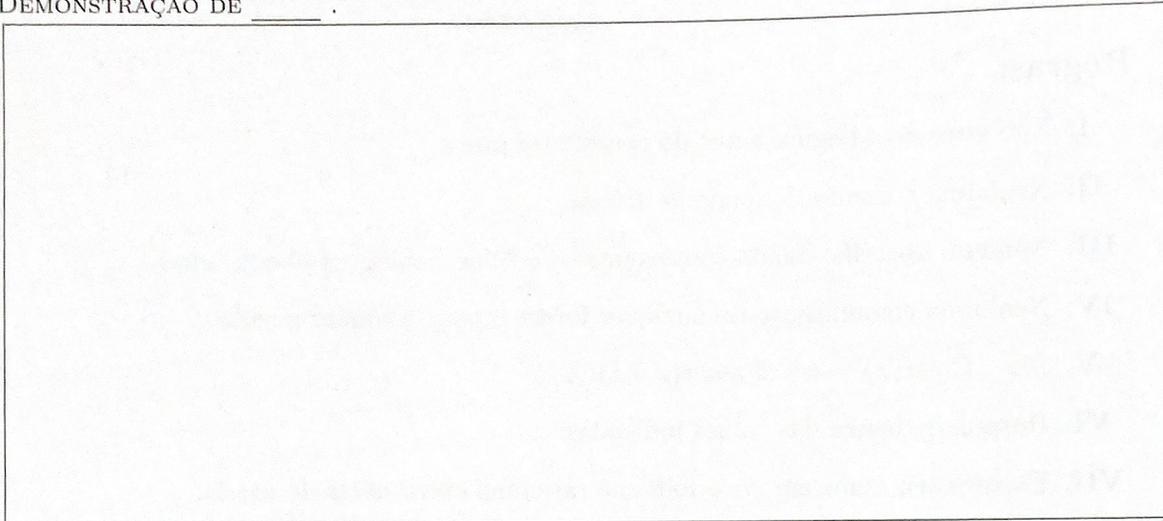
(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_



(21) H

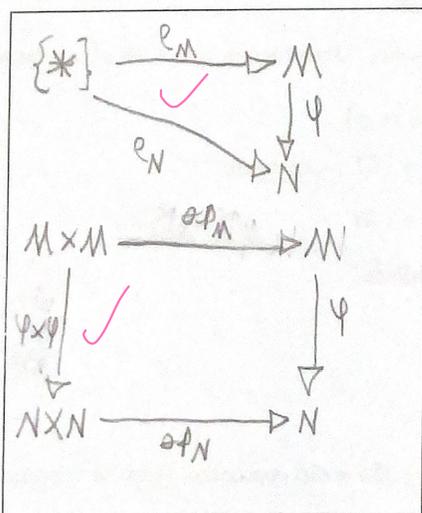
- (4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $M, N$  monóides. Seja  $\varphi: M \rightarrow N$ . Dizemos que  $\varphi$  é homomorfismo se  $\varphi$  respeita a estrutura dos monóides. Ou seja:  
 $(\forall m, m' \in M) [\varphi(mm') = \varphi m \varphi m']$  &  $\varphi e_M = e_N$ .

- (5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.



- H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação. DEMONSTRAÇÃO.

Suponha  $\varphi$  sobrejetiva e  $\varphi$  respeita  $op$ .  
Parte  $\varphi$  resp Id:  
Seja  $m \in M$ , tal que  $\varphi m = e_N$  [ $\varphi$  sobrejetiva].  
Calculamos:  
 $\varphi m \varphi e_M = \varphi(m e_M)$  [ $\varphi$  resp  $op$ ]  
 $= \varphi m$  [ $M$ -Id].  
 $\varphi m \varphi e_M = e_N \varphi e_M$  [escolha de  $m$ ]  
 $\varphi m = \varphi e_M$  [ $M$ -Id].  
Logo  $\varphi e_M = \varphi m$ .  
Logo  $\varphi e_M = e_N$  [escolha de  $m$ ].  
Parte  $\varphi$  resp  $op$ : Imediata.

(14) D

Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.

(12) D1. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .

(14) D2. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .

(12) D3. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$ .

(12) D4. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve a  $(\approx)$ .

DEMONSTRAÇÃO DE D2.

<p>Prova <math>\ker \varphi \leq \mathcal{A}</math>:</p> <p>Id-fechado: Imediato <math>[\varphi \text{ resp } \text{Id}]</math>.</p> <p>One test: Sejam <math>x, y \in \ker \varphi</math>.</p> <p>Calculamos:  <math display="block">\begin{aligned} \varphi(xy^{-1}) &amp;= \varphi x \varphi y^{-1} \quad [\varphi \text{ resp } \varphi] \\ &amp;= \varphi x (\varphi y)^{-1} \quad [\varphi \text{ resp } \text{inv}] \\ &amp;= e_B e_B^{-1} \quad [\text{escolha de } x, y] \end{aligned}</math> </p>	<p><math>= e_B</math>.</p> <p><math>\ker \varphi</math> é fechado pelas conjugadas: Sejam <math>a \in \mathcal{A}</math> e <math>k \in \ker \varphi</math>.</p> <p>Calculamos:  <math display="block">\begin{aligned} \varphi(aka^{-1}) &amp;= \varphi a \varphi k \varphi a^{-1} \quad [\varphi \text{ resp } \varphi] \\ &amp;= \varphi a e_B \varphi a^{-1} \quad [\text{escolha de } k] \\ &amp;= \varphi a \varphi a^{-1} \\ &amp;= \varphi a (\varphi a)^{-1} \quad [\varphi \text{ resp } \text{inv}] \\ &amp;= e_B. \end{aligned}</math> </p>
---	---

(21) S

Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.

(3) S0. Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

Seja  $M$  monóide. Seja  $N \subseteq M$ . Dizemos que  $N$  é submonóide de  $M$  se  $(\forall m, m' \in N) [mm' \in N]$  e  $e_M \in N$ .

(6) S1. Sejam  $M$  monóide e  $A \subseteq M$ .

Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq M$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^\nabla$  (TOP-DOWN).

$\langle A \rangle^\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{N \mid N \leq M\}$

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_\Delta$  (BOTTOM-UP).

$\langle A \rangle_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup A_n$ .  
 $A_n \stackrel{\text{def}}{=} A$   
 $A_n = A_{n-1} \cup \{e\} \cup \{a^{-1} | a \in A_{n-1}\}$

8 | 10 | 12) S2.  $\langle A \rangle^\nabla \leq M$ .

S3.  $\langle A \rangle_\Delta \leq M$ .

S4.  $\langle A \rangle_\Delta = \langle A \rangle^\nabla$ .

DEMONSTRAÇÃO DE S4.

Sejam  $N = \langle A \rangle_\Delta$ .  
Logo  $N \leq M$  por S1.

Só isso mesmo.

One test:  $(\forall G: \text{grupo}) (\forall H \leq G) [H\text{-habitado} \wedge (\forall x, y \in H) [xy^{-1} \in H] \Rightarrow H \leq G]$

Seja  $G$  grupo.

Seja  $H \leq G$ , tal que  $H$ -habitado e  $(\forall x, y \in H) [xy^{-1} \in H]$ .

Id-fechado:

Seja  $h \in H$  [ $H$ -habitado].

Logo  $hh^{-1} \in H$  [imp].

Logo  $e \in H$  [Id]. ✓

Inv-fechado:

Seja  $h \in H$ .

Logo  $eh^{-1} \in H$  [imp].

Logo  $h^{-1} \in H$  [Id]. ✓

$\forall p$ -fechado:

Sejam  $x, y \in H$ .

Logo  $xex^{-1}$  e  $yy^{-1} \in H$  [imp].

Logo  $xex^{-1}xy^{-1} \in H$  [Id-Inv].

Logo  $xxy^{-1} \in H$  [Id].

Nesta Altura™,  
não precisava!

(se fosse só pra esse  
uso, teria sido  
mais rápido

demonstrar o  
 $\ker \varphi \leq A$  pela  
definição mesmo!)

→ Aqui começou supondo  $x \in H$  &  $y \in H$   
e acabou concluindo...  $x \in H$  &  $y \in H$  !

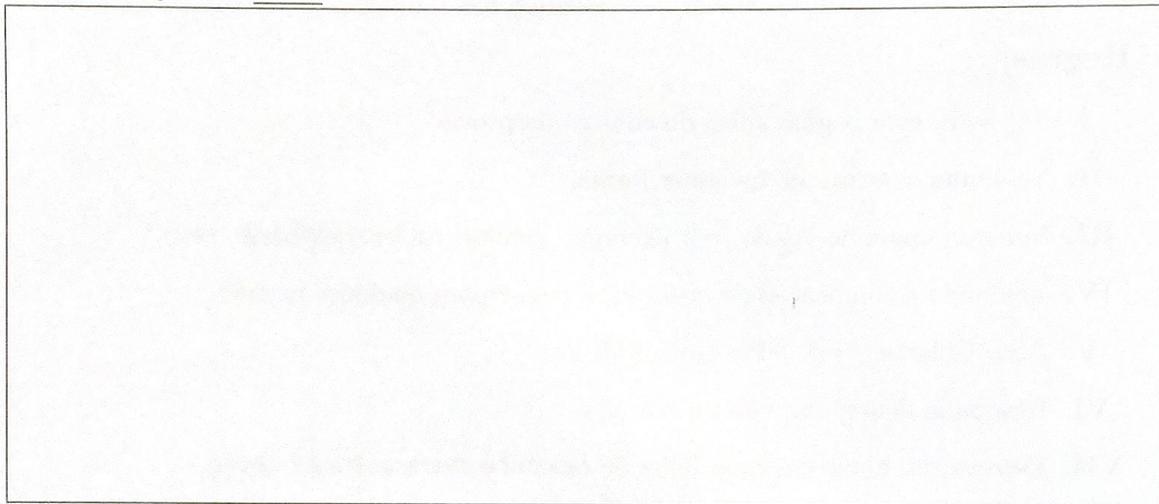
(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_ .



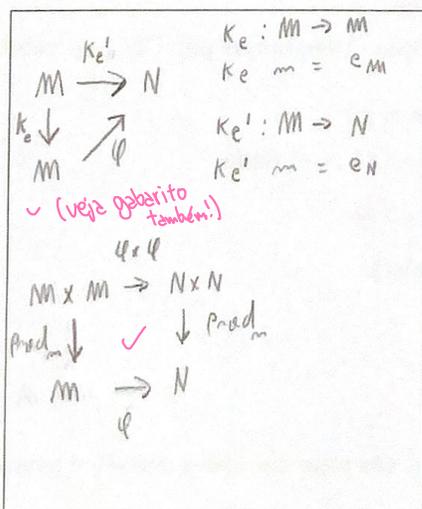
(21) H

- (4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $M, N$  monóides. Seja  $\varphi: M \rightarrow N$ . Chamamos  $\varphi$  de homomorfismo entre  $M$  e  $N$  sse  $\varphi$  preserva a estrutura de  $M$ , ou seja:  $(\forall m, m' \in M) [\varphi(mm') = \varphi(m)\varphi(m')] \ \& \ \varphi(e_M) = e_N$ .

- (5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo. DIAGRAMAS.



- H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação. DEMONSTRAÇÃO.

Suponha que  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a op.  
 $\varphi$  respeita a op: imediato.  
 $\varphi(e_M) = e_N$ :  
 Seja  $m$  tal que  $\varphi(m) = e_N$ .  
 Calc:  
 $\varphi(e_M) = \varphi(e_M) e_N \quad (N \neq \emptyset)$   
 $= \varphi(e_M) \varphi(m) \quad (\text{escolha de } m)$   
 $= \varphi(e_M m) \quad (\varphi \text{ resp op})$   
 $= \varphi(m) \quad (M \neq \emptyset)$   
 $= e_M \quad (\text{escolha de } m)$

(14) **D**

Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.

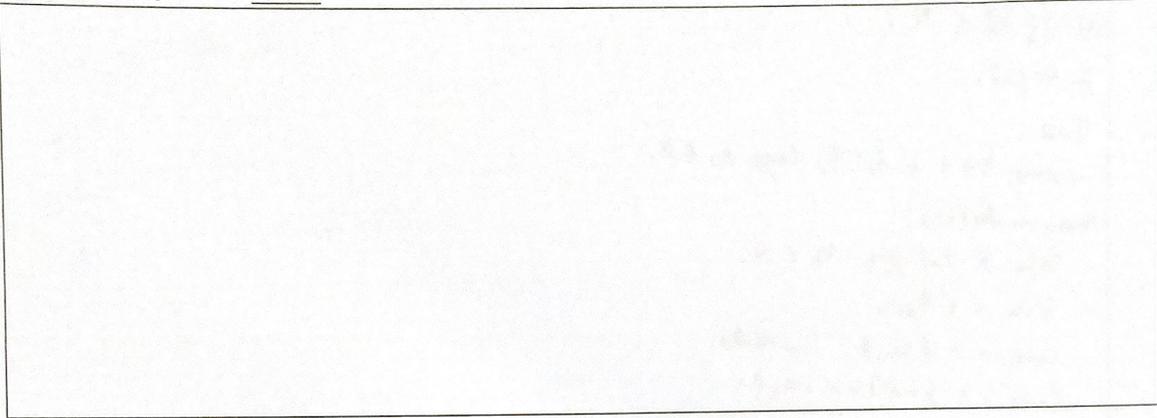
(12) **D1.** Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .

(14) **D2.** Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .

(12) **D3.** Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$ .

(12) **D4.** Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve a  $(\approx)$ .

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_.



(21) **S**

Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

Seja  $\mathcal{M}$  um monóide. Seja  $H$  um subconjunto de  $\mathcal{M}$ .  $H$  é um submonóide de  $\mathcal{M}$  se e só se  $e_{\mathcal{M}} \in H$  &  $(\forall h, h' \in H)[h \cdot h' \in H]$ .

(6) **S1.** Sejam  $\mathcal{M}$  monóide e  $A \subseteq \mathcal{M}$ .

Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq \mathcal{M}$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^\nabla$  (TOP-DOWN).

$\langle A \rangle^\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{ H \ni A \mid H \leq \mathcal{M} \}$ .

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_\Delta$  (BOTTOM-UP).

Seja  $(A_n)_n$  tal que  $A_0 = A$  &  $A_n = A_{n-1} \cup \{e_{\mathcal{M}}\} \cup \{a \cdot a' \mid a, a' \in A_{n-1}\}$ .  $\langle A \rangle_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n A_n$ .

8 | 10 | 12) **S2.**  $\langle A \rangle^\nabla \leq M$ .

DEMONSTRAÇÃO DE S4.

**S3.**  $\langle A \rangle_\Delta \leq M$ .

**S4.**  $\langle A \rangle_\Delta = \langle A \rangle^\nabla$ .

$(\subseteq)$ :  
Seja  $a \in \langle A \rangle_\Delta$ .  
Logo, seja  $n$  tal que  $a \in A_n$ .  
Seja  $H \ni A$  tal que  $H \leq \mathcal{M}$ .  
Logo, pelo (\*)  $a \in H$ .  
✓

$(\supseteq)$ :  
Seja  $a \in \langle A \rangle^\nabla$ .  
Logo,  $a \in A$ . ✗ Como? Isso acontece apenas quando  $A$  é um submonóide de  $\mathcal{M}$ .  
Isto é verdade? Não.  
Como  $A_0 = A$ , logo  $a \in A_0$ .  
✗

Só isso mesmo.

LEMMATA

(\*):

Condições e contexto da demonstração! ✓

$(\forall n)[A_n \subseteq H]$

indução.

Base:

Como  $H \ni A$  e  $A_0 = A$ , logo  $A_0 \subseteq H$ . ✓

Passo indutivo:

Seja  $k$  tal que  $A_k \subseteq H$ .

Seja  $x \in A_{k+1}$ . ✓

Logo  $x \in \{e, m\}$ : imediato. ✓

Logo  $x \in \{a^i | a, a^i \in A_k\}$ :

Logo, existem  $a, a^i \in A_k$  tais que  $x = a^i$ . ✓

Pelo (HI) e pelo fato de  $H \subseteq M$ , temos que  $a, a^i \in A_k$ . ✓

Logo,  $x \in A_k$ . ✓

op. fechado

Logo,  $x \in H$ . (HI) ✓

Caso  $x \in A_k$ :

(Pelo H.I.)

(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

- (8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .
- (16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.
- (8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .
- (24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C4.

$(\Leftarrow)$  Suponha que  $G$  é abeliano

$(\approx)$  é compatível com a (id)  $\rightarrow$  imediato pela reflexividade da  $(\approx)$  é compatível com a (op):

Suponha  $x, y, g$  tais que  $x = y g y^{-1}$

Logo, seja  $a, a', u, u' \in G$  t.q.  $a \approx a'$  e  $u \approx u'$ .

Logo, como  $G$  é abeliano, temos  $a = g g^{-1} a'$ .

Logo,  $a = a'$ .

Similarmente, temos  $u = u'$ .

Logo,  $au = a'u'$ .

Logo, pela reflexividade da  $(\approx)$ , temos  $au \approx a'u'$ .

Q.E.D.  $\leftarrow$  nope! tinha mais!  $(\Rightarrow)$

Calculamos:

$$x^{-1} = (y g y^{-1})^{-1}$$

$$= (y g^{-1} y)^{-1} \quad [\text{Inversão}]$$

$$= (e y)^{-1}$$

$$= y^{-1}$$

Logo, pela reflexividade da  $(\approx)$ , temos  $x^{-1} \approx y^{-1}$ .

Complicou!

(21) H

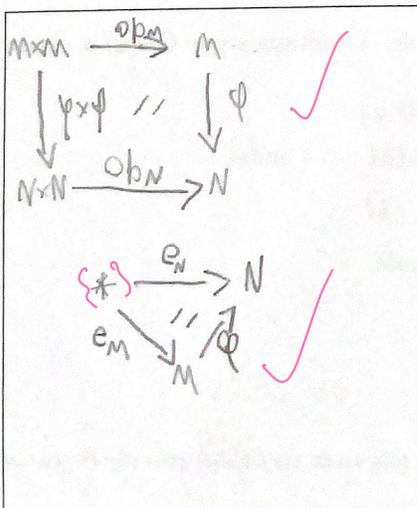
(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

Sejam  $A, B$  monóides e seja  $\varphi: A \rightarrow B$ . Dizemos que  $\varphi$  é um homomorfismo de  $A$  para  $B$  DDE:  $(\forall a, a' \in A) [\varphi(a \cdot a') = \varphi(a) \cdot \varphi(a')] \ \& \ \varphi(e_A) = e_B$ .

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.



H2. Demonstre o seguinte critério.

Sejam  $M, N$  monóides e  $\varphi: M \rightarrow N$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

$(\Leftarrow)$

$\varphi$  respeita a op é imediato. Como  $\varphi$  é sobrejetiva, seja  $e_N \in N$  t.q.  $\varphi(m) = e_N$ .

Calculamos:

$$\varphi(m) = \varphi(m \cdot e_M) \quad [\text{id}_M]$$

$$= \varphi(m) \cdot \varphi(e_M) \quad [\varphi \text{ respeita op}]$$

$$= e_N \cdot \varphi(m) \quad [\text{escolha de } m]$$

$$= \varphi(m) \quad [\text{id}_N]$$

Logo, toda escolha de  $m$ , temos  $e_N = \varphi(m)$ .

Q.E.D.

Q.P.  $(\Rightarrow)$ .

(24) C

Escolha exatamente uma das C1, C2, C3, C4.

Seja  $G$  um grupo.

(8) C1.  $\text{Cls}(e) = \{e\}$ .

(16) C2.  $G$  abeliano sse toda classe de conjugação de  $G$  é singleton.

(8) C3. Todo membro  $a \in G$  conjuga com todos os seus conjugados:  $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$ .

(24) C4.  $(\approx)$  é uma congruência sse  $G$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE C1.

$\{f \in G \mid e \approx f\} = \{f \in G \mid \exists g \in G [e = gfg^{-1}]\}$  ← o que é isso?

Seja  $g, f \in G$  tal que  $e = gfg^{-1}$ . Calculemos  $e$ . Logo  $geg^{-1} = gfg^{-1}$  ←  $gg^{-1}f = ef = f$  e pronto.

$e = e$	$geg^{-1} = gfg^{-1}$ (op $g$ pela esquerda)
$= gg^{-1}$	$gee = gfe \quad g^{-1}g = e$
$= (ge)g^{-1}$	$g^{-1}gee = g^{-1}gfe$ (op $g^{-1}$ pela direita)
$= geg^{-1}$	$eee = efe \quad g^{-1}g = e$

$eee = efe$  ← ??

Pela propriedade das id ← ?

$e = f$

Logo  $\text{Cls}(e) = \{e\}$

pra que esse passo?

isso é um bocado de proposições.

(21) H

(4) H0. Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

(5 + 12) H1. Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade significa que  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um homomorfismo. DIAGRAMAS.

H2. Demonstre o seguinte critério. Sejam  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  monóides e  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  uma função. Logo:  $\varphi$  homomorfismo sse  $\varphi$  é sobrejetiva e respeita a operação. DEMONSTRAÇÃO.

(14) D

Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.

- (12) D1. Sejam  $H, K$  subgrupos de um grupo  $G$ . Logo  $HK = KH \implies HK \leq G$ .
- (14) D2. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$ .
- (12) D3. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$ .
- (12) D4. Seja  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo de grupos. Logo  $\varphi$  preserve  $\approx$ .

DEMONSTRAÇÃO DE D1 .

$[\forall h, h_1 \in H, k, k_2 \in K] [hk = k_1 h_1]$  *o que é isso?!*

Seja  $m$  um natural  $h_m \in H$  e  $k_m \in K$ .

agora seguiremos os calculos com isso vemos que  $HK$  é fechado com a operação, pois podemos aplicar isso para  $h$  também, e por  $H, K$  já serem subgrupos, vemos que são fechados op e id. Então  $HK \leq G$

$$\begin{cases} h_1 k = k_1 h_1 \\ h_1 k h_1^{-1} = k_1 e \quad (h_1 h_1^{-1} = e) \\ h_1 h_2 k_2 = k_1 \quad (k h_1^{-1} = h_2 k_2) \\ h_3 k_2 = k_1 \quad (h_1 h_2 = h_3) \end{cases}$$

*props secas.*

*Puro handwaving! cuidado!*

(21) S

Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.

- (3) S0. Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

- (6) S1. Sejam  $\mathcal{M}$  monóide e  $A \subseteq \mathcal{M}$ . Defina o submonóide gerado por  $A \subseteq \mathcal{M}$  em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle^\nabla$  (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE  $\langle A \rangle_\Delta$  (BOTTOM-UP).

(8 | 10 | 12) S2.  $\langle A \rangle^\nabla \leq M$ .

S3.  $\langle A \rangle_\Delta \leq M$ .

S4.  $\langle A \rangle_\Delta = \langle A \rangle^\nabla$ .

DEMONSTRAÇÃO DE \_\_\_\_\_ .

Só isso mesmo.