
Nome:

2023-06-05

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$.²
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- IX. Escolha exatamente 2 das C, H, D, S.³

Esclarecimento. Escreva suas demonstrações e definições em linguagem “high-level” sem comprometer rigor, clareza, e correção. Escreva em texto compilável em português matemático, sem depender de conhecimento de gírias matemáticas. (Podes utilizar gírias sim—é bom!—mas o texto das definições precisa compilar até para quem não as conhece.)

Presente. Na tua demonstração de \mathbf{X}_n puedes considerar demonstrados os teoremas \mathbf{X}_i com $i < n$.

Lembrete. Nas aulas demonstramos que, para certos subgrupos $H \leq G$, as relações de equivalência (R_H) e (L_H) são *congruências*—tais subgrupos acabamos chamando de *subgrupos normais*. Uma outra relação de equivalência que definimos para qualquer grupo G foi a (\approx) de conjugação, definida pela

$$x \approx y \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists g \in G) [x = yg^{-1}].$$

Suas classes de equivalência chamamos de *classes de conjugação*. Denotamos por $\text{Cls}(a)$ a classe de conjugação de a :

$$\text{Cls}(a) \stackrel{\text{def}}{=} [a]_{(\approx)} \equiv \{g \in G \mid a \approx g\}.$$

Definição. Um *monóide* \mathcal{M} é um conjunto estruturado $\mathcal{M} = (M; \cdot, e)$ onde

$$(\cdot) : M \times M \rightarrow M \quad e : M$$

tal que: (M-ass) a (\cdot) é associativa; (M-id) e é uma (\cdot) -identidade.

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **C**

Escolha exatamente uma das **C1, C2, C3, C4**.

Seja G um grupo.

- (8) **C1.** $\text{Cls}(e) = \{e\}$.
(16) **C2.** G abeliano sse toda classe de conjugação de G é singleton.
(8) **C3.** Todo membro $a \in G$ conjuga com todos os seus conjugados: $(\forall a, g \in G) [a \approx gag^{-1}]$.
(24) **C4.** (\approx) é uma congruência sse G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE ____ .

(21) **H**

- (4) **H0.** Como definirias o que significa homomorfismo de monóides?

DEFINIÇÃO.

- (5 + 12) **H1.** Desenhe o(s) diagrama(s) cuja comutatividade *significa* que $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um homomorfismo.

DIAGRAMAS.

- H2.** Demonstre o seguinte critério.

Sejam \mathcal{M}, \mathcal{N} monóides e $\varphi : M \rightarrow N$ uma função. Logo: φ homomorfismo se φ é sobrejetiva e respeita a operação.

DEMONSTRAÇÃO.

(14) **D** *Escolha exatamente uma das D1, D2, D3, D4.*

(12) **D1.** Sejam H, K subgrupos de um grupo G . Logo $HK = KH \implies HK \leq G$.

(14) **D2.** Seja $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\ker \varphi \trianglelefteq \mathcal{A}$.

(12) **D3.** Seja $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ homomorfismo de grupos. Logo $\text{im} \varphi \leq \mathcal{B}$.

(12) **D4.** Seja $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ homomorfismo de grupos. Logo φ preserve a (\approx) .

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(21) **S** *Escolha exatamente uma das S2, S3, S4.*

(3) **S0.** Defina o que significa submonóide dum monóide.

DEFINIÇÃO.

(6) **S1.** Sejam \mathcal{M} monóide e $A \subseteq \mathcal{M}$.

Defina o submonóide gerado por $A \subseteq M$ em duas maneiras: uma top-down e uma bottom-up.

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle^\nabla$ (TOP-DOWN).

DEFINIÇÃO DE $\langle A \rangle_\Delta$ (BOTTOM-UP).

(8 | 10 | 12) **S2.** $\langle A \rangle^\nabla \leq M$.

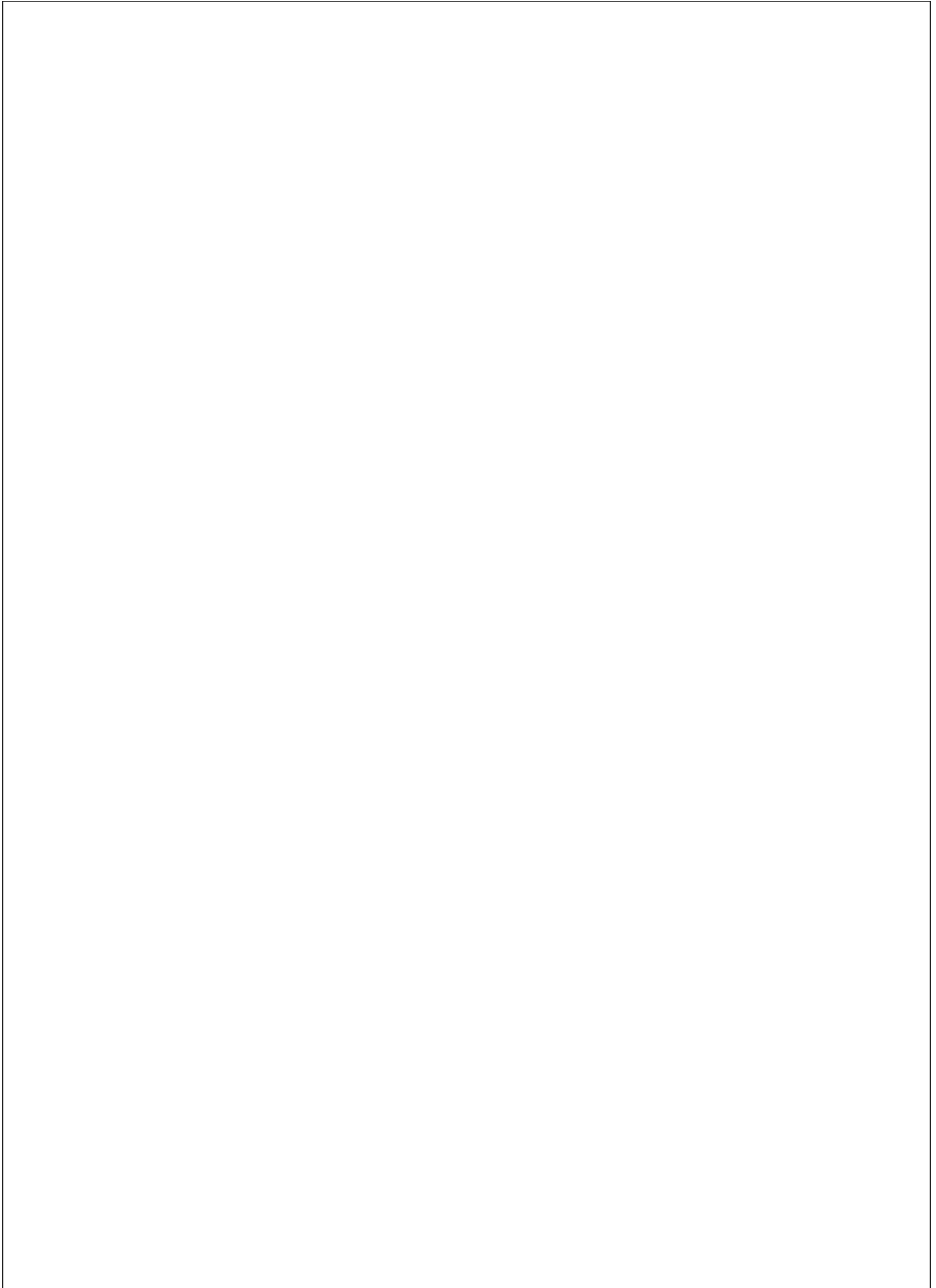
S3. $\langle A \rangle_\Delta \leq M$.

S4. $\langle A \rangle_\Delta = \langle A \rangle^\nabla$.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

Só isso mesmo.

LEMMATA



RASCUNHO