(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
(ab)^{-1} \arrow[r, leftrightarrow, "(1)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{comutatividade}"'] & b^{-1}a^{-1} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{comutatividade}"] \\
(ba)^{-1} \arrow[r, leftrightarrow, "(1)"] & a^{-1}b^{-1}
\end{tikzcd}$$

(1): inv - inv

Só isso mesmo.

(inv - inv)

Sejam $a, b \in G$ e G grupo abeliano

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, pois:

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$$
\begin{aligned}
(ab)^{-1} * (b^{-1}a^{-1}) &= a(b^{-1} * b)a^{-1} \quad (ass) \\
&= a * e * a^{-1} \\
&= a * a^{-1} \\
&= e
\end{aligned}
$$

Cadê o resto das justificativas?

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \&\ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

G é abeliano se (*) for comutativa. Isto é:

$\cancel{(\forall a, b)[a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}]}$

Temos que (*) $\Rightarrow (ba)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (comutativ.).

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição (*) do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, "ino."] \arrow[d, "prod."'] & (a^{-1}, b^{-1}) \arrow[r, "prod."] & a^{-1}b^{-1} \\
a\,b \arrow[r, "ino."] & (a\cdot b)^{-1} \arrow[ur, "op."'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, "ino."] \arrow[d, "prod."'] & (a^{-1}, b^{-1}) \arrow[d, "prod."] \\
a\cdot b \arrow[r, "ino."] & a^{-1}\cdot b^{-1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, "ino."] \arrow[d, "prod."'] & (a^{-1}, b^{-1}) \arrow[d, "prod."] \\
a\cdot b \arrow[r, "ino."] & a^{-1}\cdot b^{-1}
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,].$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Sejam $a, b \in G$.

Como $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, logo $((ab)^{-1})^{-1} = (a^{-1}b^{-1})^{-1}$.

Logo $((ab)^{-1})^{-1} = ((ba)^{-1})^{-1}$. [op - inv]

Logo $ab = ba$. [inv-inv] ∎

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "op"] \arrow[d, "inv"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & G \arrow[d, "inv"] \\
G \times G \arrow[r, "op"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

Seja G um grupo.

θ-op-inv. $(\forall a, b \in G)[(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}]$

Sejam $a, b \in G$.

$\vdots$

10 C

θ-inv-inv. $(\forall a \in G)[(a^{-1})^{-1} = a]$

Seja $a \in G$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(a^{-1})^{-1} \cdot e &= (a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}a && [\text{inv-L}] \\
&= ((a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a && [\text{aso}] \\
&= e \cdot a && [\text{inv-L}] \\
&= a && [\text{id-L}]. \blacksquare
\end{aligned}
$$

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

isso não faz sentido: nem como idéia nem como execução

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Consideramos que X não é único, logo $X = c$ ou $X = c'$ sendo $c \neq c'$.

Se isso for verdade temos $Xa = b$

isso faz algo?

$ca a^{-1} = ba^{-1}$ $\quad$ $c'a = b$

$c = ba^{-1}$ também $\quad$ $c'aa^{-1} = ba^{-1}$

$c' = ba^{-1}$

e c'

parece rascunho

Com isso $c' = c$, e a afirmação primária seria $c' \neq c$, logo X deve ser único

veja bem o gabarito e as diversas demonstrações de "$\exists!$".

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,] \;\;\&\;\; (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Não vou supor isso não!

Suponha G abeliano.

Sejam $a, b \in G$.

Calculamos: $(ab)^{-1} = e.(a.b)^{-1}$ [id]

$= e^{-1}.(a.b)$ [id-inv]

$= (e^{-1}.a).b$ [ass]

$\overset{?}{=} (e.a^{-1}).b$ [id-inv]

$= a^{-1}.b$ [id]

$= a^{-1}.b.e$ [id]

$= a^{-1}.b.e^{-1}$ [id-inv]

$\to (ab)^{-1} \overset{?}{=} a^{-1}.b^{-1}.e$ [id-inv]

$= a^{-1}.b^{-1}$ [id] ∎

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "inv"] \arrow[d, "id"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & G \arrow[r, "ass"] \arrow[d, phantom, "??"] & G \arrow[d, "inv"] \\
G \arrow[d, "inv"'] & & G \arrow[d, "id"] \arrow[dl, phantom, "?"] \\
G \arrow[r, "ass"'] \arrow[dr, phantom, "??"] & G \arrow[r, "inv"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

~~A2. Suponha G abeliano.~~

(id-inv) $e \cdot e^{-1} = e$

Suponha $e \cdot e^{-1}$. TYPE ERROR! Supor um objeto?

Imediato. [pela escolha de e].

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Sejam $a, b : G$ tal que $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

Calculamos:

$$\begin{aligned} ab &= ((ab)^{-1})^{-1} && [\,(\text{inv-inv})\,ab\,] \\ &= (b^{-1}a^{-1})^{-1} && [\,(\text{inv-op}]\ a, b\,] \\ &= (b^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} && [\,(\text{pela hipótese})\ b^{-1}, a^{-1}\,] \\ &= b\,a && [\,(\text{inv-inv})\,b\,;\ (\text{inv-inv})\,a\,] \end{aligned}$$

Começando assim teus a, b não são arbitrários membros do G! Compare com:

Sejam $a, b \in G$.
Logo $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$. (pela $(*)$)
⋮

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\text{inv} \times \text{inv}"] \arrow[d, "\text{op}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \times G \arrow[d, "\text{op}"] \\ G \arrow[r, "\text{inv}"'] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (a, b) \arrow[r, mapsto, "\text{inv} \times \text{inv}"] \arrow[d, mapsto, "\text{op}"'] & (a^{-1}, b^{-1}) \arrow[d, "\text{op}"] \\ ab \arrow[r, mapsto, "\text{inv}"'] & (a^{-1}b^{-1}) = (ab)^{-1} \end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

⊖ (inv-inv) $(\forall g : G)\,[(g^{-1})^{-1} = g]$

Seja $g : G$

Calculemos:

$$
\begin{aligned}
(g^{-1})^{-1} &= (g^{-1})^{-1} e && [\text{id R}] \\
&= (g^{-1})^{-1} (g^{-1} g) && [\text{inv}] \\
&= ((g^{-1})^{-1} g^{-1}) g && [\text{assoc}] \\
&= e\, g && [\text{inv}] \\
&= g && [\text{id L}]
\end{aligned}
$$

⊖ (inv-op) $(\forall a, b : G)\,[(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}]$

assim precisa de (inv-uni)/(red)

Sejam $a, b : G$

Vou demonstrar que ab é inverso de $b^{-1} a^{-1}$

Logo basta mostrar que $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$ (1) & $(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$ (2)

(Parte (1)):

Calculemos:

$$
\begin{aligned}
(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})\, a^{-1} && [\text{assoc}] \\
&= (a(bb^{-1}))\, a^{-1} && [\text{assoc}] \\
&= (a e)\, a^{-1} && [\text{inv}] \\
&= a a^{-1} && [\text{id R}] \\
&= e && [\text{inv}]
\end{aligned}
$$

(Parte (2)):

Similar

$A \times B \Rightarrow C$.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[xa = b]\ \&\ (\exists! x)[ax = b]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A_1.

Sejam $a, b : G$

Corte $(\exists! x)[ax = b]$.

Corte $(\exists x)[ax = b]$.

Basta demostrar que $a \cdot (a^{-1}b) = b$

Calculamos:

$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b$ [ASS]

$= e \cdot b$ [INV-R]

$= b$ [id-L]

Corte $(\forall y)[ay = b \Rightarrow y = a^{-1}b]$

Seja $y : G$ t.q. $ay = b$ (1)

Calculamos:

$a^{-1}b = a^{-1}(ay)$ [pela 1]

$= (a^{-1}a)y$ [ASS]

$= e \cdot y$ [INV-L]

$= y$ [id-L]

Corte $(\exists! x)[xa = b]$

Similar.

$a(a^{-1}b)$

$aa^{-1}b$

$e \cdot b$

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "OP"] \arrow[d, "INV \times INV"'] & G \arrow[d, "INV"] \\
G \times G \arrow[r, "OP"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \&\ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,].$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A_1.

Esse x aqui nem foi usado!

Sejam $a, b \in G$.

$(\exists! x)[\,xa = b\,]$:

Existência:

Tome $\boxed{x} = b a^{-1}$.

Logo $(b a^{-1}) a = b$. por que?

Logo $b(a^{-1}a) = b$.

Logo $b e = b$.

$\boxed{\text{Logo } b = b.}$

Unicidade:

Sejam $x, y : G$ t.q. $xa = b$ & $ya = b$.

Logo $xa = ya$.

Logo $x = y$. por que?

$(\exists! x)[\,ax = b\,]$:

Existência:

Tome $x = a^{-1}b$

Logo $a(a^{-1}b) = b$.

Logo $(aa^{-1})b = b$.

Logo $eb = b$

Logo $b = b$.

Unicidade:

Sejam $x, y : G$ t.q. $ax = b$ & $ay = b$.

Logo $ax = ay$.

Logo $x = y$.

(Ninguem merece nem escrever nem ler isso!)

Escreva «Similar!»

concluir algo trivial ou verdadeiro/já conhecido NUNCA é útil!!

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\mathrm{inv} \times \mathrm{inv}"] \arrow[d, "op"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & G \times G \arrow[d, "op"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{inv}"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Sejam $a, b \in G$.

Calculamos:

$ab = ((ab)^{-1})^{-1}$ (inv - inv)

$= (b^{-1}a^{-1})^{-1}$ (inv - prod)

$= (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}$ (*)

$= ba$ (inv - inv)

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "(*)"] \arrow[d, "\text{inv}\times\text{inv}"'] & G \arrow[d, "\text{inv}"] \\
G \times G \arrow[r, "(*)"'] & G
\end{tikzcd}$$

inv $(x, y) = (x^{-1}, y^{-1})$

Só isso mesmo.

$\boxed{\text{inv - prod}}$

Seja G um grupo.

$(\forall a, b \in G)\ [\ (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}\ ]$

Sejam $a, b \in G$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
b^{-1} a^{-1} &= (b^{-1} a^{-1}) e && \text{(id)} \\
&= (b^{-1} a^{-1})((ab)(ab)^{-1}) && \text{(inv)} \\
&= b^{-1}((a^{-1} a)(b(ab)^{-1})) && \text{(asso)} \\
&= b^{-1}(e(b(ab)^{-1})) && \text{(inv)} \\
&= b^{-1}(b(ab)^{-1}) && \text{(id)} \\
&= (b^{-1} b)(ab)^{-1} && \text{(asso)} \\
&= e\,(ab)^{-1} && \text{(inv)} \\
&= (ab)^{-1} && \text{(id)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{inv - inv}}$

Seja G grupo.

$(\forall a \in G)\ [\ (a^{-1})^{-1} = a\ ]$

Seja $a \in G$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(a^{-1})^{-1} &= (a^{-1})^{-1} e && \text{(id)} \\
&= ((a^{-1})^{-1})(a^{-1} a) && \text{(inv)} \\
&= ((a^{-1})^{-1} a^{-1})\, a && \text{(asso)} \\
&= e\, a && \text{(inv)} \\
&= a && \text{(id)}
\end{aligned}
$$

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano. $(\forall a,b)[ab = ba]$

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Seja G grupo. ✗
Suponha $(\forall a,b : G)[(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}]$. ✗
Sejam $a, b \in G$. ✓
Temos $(ab)(ab)^{-1} = e$ [inv]. ✓
Também temos $(ba)(ba)^{-1} = e$ [inv]. ✓
Logo $(ab)(ab)^{-1} = (ba)(ba)^{-1}$. ✓
Logo $(ab)(ab)^{-1} = (ba)(a^{-1}b^{-1})$ [inv_prod]. ✓
Logo $(ab)(ab)^{-1} = (ba)(ab)^{-1}$ [hipótese]. ✓
Logo $ab = ba$ [canc]. ✓

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "inv^2", "inv \times inv"'] \arrow[d, "op"'] & G \times G \arrow[d, "\boxed{swap}"] \\
G \arrow[r, "inv"'] & G \times G \arrow[l, "op"]
\end{tikzcd}$$

onde viu isso na (*)?

Só isso mesmo.

Inv-Prod: $(\forall a,b:G)[(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}]$

Sejam $a,b \in G$.

Calculamos:

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} && [\text{Assoc}]\\ &= (a(bb^{-1}))a^{-1} && [\text{Assoc}]\\ &= (ae)a^{-1} && [\text{inv}]\\ &= aa^{-1} && [\text{id}]\\ &= e && [\text{inv}].\end{aligned}$$

Temos $(ab)(ab)^{-1}=e$ [inv].

Logo $(ab)^{-1}=(b^{-1}a^{-1})$ [Res-R].

swap$(a,b)=(b,a)$

Res-R: $(\forall a,b:G)(\exists!x:G)[ax=b]$

Sejam $a,b \in G$.

Parte Existencial:

Tome $x=a^{-1}b$.

Calculamos:

$$\begin{aligned}a(a^{-1}b) &= (aa^{-1})b && [\text{Assoc}]\\ &= eb && [\text{inv}]\\ &= b && [\text{id}].\end{aligned}$$

Parte Unicidade:

Seja y tal que $ay=b$.

Temos $a(a^{-1}b)=b$.

Logo $ay=a(a^{-1}b)$.

Logo $y=a^{-1}b$ [canc].

Canc: $(\forall a,b,c:G)[ab=ac \Rightarrow b=c]$

Sejam $a,b,c \in G$.

Suponha $ab=ac$.

Logo $a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)$ [θ].

Logo $(a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c$ [Assoc].

Logo $eb=ec$ [inv].

Logo $b=c$ [id].

θ: $(\forall x,y:G)[x=y \Rightarrow f(x)=f(y)]$

Sejam $x,y \in G$.

Calculamos:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x)\\ &= f(y) && [x=y].\end{aligned}$$

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Sejam $a, b \in G$.

Calculemos:

$$\begin{aligned}
ba &= (ba)e && [\,id\,] \\
&= (ba)((ab)^{-1}ab) && [\,inv\,] \\
&= (ba)((a^{-1}b^{-1})ab) && [\,H\,] \\
&= ((b(aa^{-1}))b^{-1})ab && [\,assoc\,] \\
&= ((be)b^{-1})ab && [\,inv\,] \\
&= (bb^{-1})ab && [\,id\,] \\
&= e(ab) && [\,inv\,] \\
&= ab && [\,id\,]
\end{aligned}$$

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "(inv)\times(inv)"] \arrow[d, "(op)"'] & G \times G \arrow[d, "(op)"] \\
G \arrow[r, "(inv)"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

por quê?

tem rótulo!

sejam $a, b \in G$.
Basta demonstrar que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
Calculamos,

$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ [por $(\forall a, b \in G)[(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}]$] (1)
$= (e \times a^{-1}) \times (b^{-1} \times e)$ [pelos IdR a^{-1} e IdL b^{-1}]
$= ((b^{-1} \times b) \times a^{-1}) \times (b^{-1} \times (a \times a^{-1}))$ [pelos InvR b e InvL a]
$= b^{-1} \times (b \times a^{-1}) \times (b^{-1} \times (a \times a^{-1}))$ [?
$= b^{-1} \times b \times (a^{-1} \times b^{-1}) \times (a) \times a^{-1}$
$= b^{-1} \times b \times (ab)^{-1} \times (a \times e) \times a^{-1}$ [por (1) e pela IdL a]
$= b^{-1} \times b \times (ab)^{-1} \times (a \times (b \times b^{-1})) \times a^{-1}$ [pelo InvL b]
$= b^{-1} \times b \times (ab)^{-1} \times (ab) \times b^{-1} \times a^{-1}$
$= b^{-1} \times (b \times e) \times b^{-1} \times a^{-1}$ [pelo InvR (ab)]
$= b^{-1} \times (b \times b^{-1}) \times a^{-1}$ [pela IdR b]
$= b^{-1} \times (e \times a^{-1})$ [pela IdL b]
$= b^{-1} \times a^{-1}$ [pela IdR a^{-1}]

(socorro!)

(não faz sentido misturar justaposição e notação-(*).

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[dr, "\mathrm{swap}"'] \arrow[rr, "\mathrm{prod}"] & & G \times G \arrow[d, "\mathrm{inv}"] \\
G \times G \arrow[r, "\mathrm{inv}^2", "\mathrm{inv} \times \mathrm{inv}"'] & G \times G \arrow[r, "?"'] & G \times G
\end{tikzcd}$$

??

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Seja a, b.
Vou mostrar que $(\exists! x)[xa = b]$.
EXISTÊNCIA:
...inexistente!
(Profundo.)

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "a.b"] \arrow[d, "\mathrm{Inv}(a)"'] & G \arrow[dr, "\mathrm{Inv}(a.b)"] & \\
G \arrow[r, "\mathrm{Inv}(b)"'] & & G \\
& & G \arrow[u, "\mathrm{Inv}(a).\mathrm{Inv}(b)"']
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Sejam $a, b \in G$.

(inv-uni?)

Basta demonstrar que $(a^{-1}b^{-1})(ab) = e$. [G-Res.]

Calculamos:

$$\begin{aligned}
(a^{-1}b^{-1})(ab) &= ((a^{-1}b^{-1})a)\,b && [G\text{-Ass}] \\
&= ((b^{-1}a^{-1})a)\,b && [G\text{-Com.}] \\
&= (b^{-1}(a^{-1}a))\,b && [G\text{-Ass.}] \\
&= (b^{-1}e)\,b && [G\text{-Inv}] \\
&= b^{-1}b && [G\text{-Id.}] \\
&= e && [G\text{-Inv.}]
\end{aligned}$$

?! Se tivesse comutatividade já seria abeliano!

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "op."] \arrow[d, "Inv \times Inv."'] \arrow[dr, phantom, "="] & G \arrow[d, "Inv."] \\
G \times G \arrow[r, "op"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

[G - Res]

$(\forall a)(\exists! x)[ax = e = xa]$ erro de honestidade

Parte existencial.

Imediato pelos axiomas.

não faz sentido esse uso.

Parte unicidade.

$(\forall x, x')[\overbrace{xa = e = ax \ \& \ x'a = e = ax'}^{\varphi} \Rightarrow x = x']$

Sejam x, x' t.q. φ.

Calculamos

$$\begin{aligned} xa &= (xa)e \\ &= (xa)(x'a) \\ &= e(x'a) \\ &= x'a \end{aligned}$$

Cadê o $x = x'$?

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A1 . → prz que isso? Qual teu alvo?

Sejam $a, b, x \in G$.

Existência:

Calculemos: $xa = b$ → donde tirou?

$(xa)a^{-1} = ba^{-1}$ [inv-R]

$x(aa^{-1}) = ba^{-1}$ [ass]

$xe = ba^{-1}$ [inv-R]

$x = ba^{-1}$ [id-R]

Testemunho ba^{-1}

Unicidade: Similar. — não

Sejam $a, b, x \in G$

Existência:

Calculemos: $ax = b$

$a^{-1}(ax) = a^{-1}b$ [inv-L]

$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$ [ass]

$ex = a^{-1}b$ [inv-L]

$x = a^{-1}b$ [id-L]

Testemunho $a^{-1}b$

"Similar"

- isso não é um cálculo, apenas umas afirmações secas.
- isso é mais perto de ser a unicidade

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

Sejam $a, b \in G$

$$\begin{tikzcd}
? \; ab \arrow[r, "\text{split?}"] \arrow[d, "\text{inv}"'] & a*b \arrow[d, "\text{inv}\times\text{inv}"] \\
(ab)^{-1} \arrow[r, "\text{split?}"'] & a^{-1}*b^{-1}
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,].$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

não parece um b

Sejam $a, \boxed{b} : G$

Calculamos:

$(ab) = ab \cdot e$	[G2 (ab)]
$= ab \cdot (ab)^{-1} \cdot ((ab)^{-1})^{-1}$	[G3 $(ab)^{-1}$]
$= ((ab)(ab)^{-1}) \cdot ((ab)^{-1})^{-1}$	[G1 (ab)(ab)$^{-1}$((ab)$^{-1}$)$^{-1}$]
$= e \cdot ((ab)^{-1})^{-1}$	[G3 (ab)]
$= ((ab)^{-1})^{-1}$	[G2]
$= (a^{-1} b^{-1})^{-1}$	[Escolha de G) a b]
$= (b^{-1})^{-1} (a^{-1})^{-1}$	[inv-op a^{-1} b^{-1}]
$= (ba)$	[inv-inv b, inv-inv a]

Q.E.D.

tudo isso?!

até demonstrado o (inv-inv) ?!?

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "inv \times inv"] \arrow[d, "op"'] & G \times G \arrow[d, "op"] \\
G \arrow[r, "inv"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

[inv-prop] $(\forall G : \text{Group})(\forall a, b : G)\ [(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}]$

Sejam G um grupo.
Sejam $a, b : G$
Calculamos:

$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1}$ [G1]
$= a\, e\, a^{-1}$ [G3]
$= a\, a^{-1}$ [G2]
$= e$ [G2]

temos $e = ab \cdot (ab)^{-1}$ pelo (G2).
Logo, $(ab) \cdot (ab)^{-1} = (ab)(b^{-1}a^{-1})$
Logo, $(ab)^{-1}(ab)(ab)^{-1} = (ab)^{-1}(ab)(b^{-1}a^{-1})$
Logo, $e \cdot (ab)^{-1} = e(b^{-1}a^{-1})$ [G1, G3] (bizarro!)
Logo, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
Q.E.D.

[inv-inv] $(\forall G : \text{Group})(\forall g : G)\ [g = (g^{-1})^{-1}]$

Seja G um grupo
Seja $g : G$
calculamos:

$g = g \cdot e$ [G2]
$= g(g^{-1}(g^{-1})^{-1})$ [G3 g^{-1}]
$= (g g^{-1})(g^{-1})^{-1}$ [G1]
$= e\,(g^{-1})^{-1}$ [G3]
$= (g^{-1})^{-1}$ [G2]

Q.E.D.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \&\ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,].$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Seja G abeliano. Logo, G segue o padrão "$a*b = b*a$".

O que significa que um grupo «segue o padrão»?!? (Nada.)

Calculamos:

não é um cálculo mas sim afirmações secas.

$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$(ab)^{-1}.1^{-1} = a^{-1}(b^{-1}).1^{-1}$, (por associatividade).

O que tem a ver com esse "1" aí?!

$(ab)^{0} = a^{-1}(b^{-1})^{-1}$?

$1 = a^{-1}b^{1}$ (expoente 0)

$1 = ab^{0}$

$\boxed{1 = 1}$ → concluindo algo conhecido como 0=0 ou 1=1

Logo, podemos dizer que G é abeliano. não serve pra nada!

(nada disso faz sentido)

não.

tu já disse isso na tua primeira linha.

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "\text{comut}"] \arrow[d] & \circledast \arrow[r] & G \\ b & a & & \end{tikzcd}$$

$(\forall a, b \in G)[(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}]$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

justifique!! para quaisquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. $(*)$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Sejam $a, b : G$.

logo $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

$\boxed{\text{Basta}}$ $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, isto é, $a^{-1}b^{-1}$ inverso de ba.

Calculamos:

$$\begin{aligned}
(a^{-1}b^{-1})ba &= (a^{-1}b^{-1}b)a && [\text{ass}]\\
&= (a^{-1}e)a && [\text{inv}]\\
&= a^{-1}a && [\text{id}]\\
&= e. && [\text{inv}]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
ba(a^{-1}b^{-1}) &= (baa^{-1})b^{-1} && [\text{ass}]\\
&= (be)b^{-1} && [\text{inv}]\\
&= bb^{-1} && [\text{id}]\\
&= e. && [\text{inv}]
\end{aligned}}$$

ninguem merece! «Similar»!

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "op"] \arrow[d, "swop"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & G \arrow[dr, "inv"] & \\
G \times G \arrow[r, "inv \times inv"] & G \times G & G \arrow[l, "op"]
\end{tikzcd}$$

$swop\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

COMO ASSIM?

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

$(\forall a,b)\,[[\exists!\,x)\,[xa=b]\ \&\ (\exists!\,x)\,[ax=b]]$

(id) -

$= (\forall a,b)\,[[a=b]\ \&\ [a=b]]$?!?

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

Só isso mesmo.

Aqui não tem nada compilável, parece rascunho

$a, b \in G, (ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}.$

$\cancel{(a,b)^{-1} = a^{-1} b^{-1}}$

$(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

$a^{-1} b^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

$(\forall a)[a^{-1} a = e = a a^{-1}]$

$\rightarrow$ unico x

$(\forall a, b)[(\exists! x)[xa = b] \,\&\, (\exists! x)[ax = b]]$

$(\forall a) \quad ea \overset{(L)}{=} b \overset{(R)}{=} ae$

$(id)(\forall a, b)[(\exists! e)[ea = b = ea]]$

$(\forall a)[[\exists! x][e \overset{xa}{\cancel{ax}} = a = eax]]$

$(\forall a) = [ea = a = ae]$

$\cancel{(\forall a, b, c) = [abc =}$

$(\forall a, b)[a = b \,\&\, a = b]$

A1. Demons

Dados

$a : G$

$b : G$

$\exists! x [xa = b] \overset{(A1.x)}{\&} [ax = b]$

Sejam x, y pertencentes a G

$ay = b$

$xa = b$

Suponha que $xa = b$

e $ay = b$

...?

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

Escrever proposições soltas não serve pra nada!

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Estamos questionando isso?

Se G é grupo, então G é fechado em sua operação binária. Seja $a, b, x \in G$, então $a \cdot x \in G$ e $x \cdot a \in G$!!

Temos a existência, falta a unicidade.

Seja $a, b, x, y \in G$ por quê?!? $x \cdot a = b$ e $y \cdot a = b \Rightarrow x = y$

Como $b = b$ calculamos $ax = b$ e $ay = b \Rightarrow x = y$

$xa = ya$	$ax = ay$ (suponha)
$\Rightarrow xa \cdot a^{-1} = ya \cdot a^{-1}$	$\Rightarrow a^{-1} \cdot ax = a^{-1}ay$ (inv)
$\Rightarrow x \cdot e = ye$	$\Rightarrow ex = ey$ (id)
$\Rightarrow x = y$	$\Rightarrow x = y$

de onde?!

isso é ilegível, e não é um cálculo.

(4) **B**

Teu leitor precisa resolver um puzzle, procurar achar as peças certas no meio do caos, reescrever tudo fazendo o que precisa ser feito para conseguir uma demonstração!

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\mathrm{inv} \times \mathrm{inv}"'] & G \arrow[d, "{-1}"] \\
G \times G \arrow[r, "*"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

«Logo»

Sejam $a, b \in G$ ✓

Suponha $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ (1)

G é abeliano se $ab = ba$ para todo $a, b \in G$.

Não faz sentido poluir tua demonstração com definições das noções envolvidas!

calculamos:

$a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ [Por 1]

$= b^{-1}a^{-1}$ [Inv-Prod]

...por que isso é suficiente?

Aqui não é para supor isso, mas sim <u>infer</u> isso!

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\mathrm{op}"] \arrow[d, "\mathrm{Inv} \times \mathrm{Inv}"'] & G \arrow[d, "\mathrm{Inv}"] \\
G \times G \arrow[r, "\mathrm{op}"'] & G
\end{tikzcd}$$

✓

Só isso mesmo.

(INV-PROD) $(\forall a, b \in G)\,[(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}]$

Sejam $a, b \in G$

~~calculamos~~.

$\boxed{\text{Sendo } b^{-1}a^{-1} \text{ o inverso}}$ de ab, basta mostrar que $ab * b^{-1}a^{-1} = e$

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= (a(bb^{-1}))a^{-1} && [\text{Ass}] \\
&= (ae)\,a^{-1} && [\text{Inv}] \\
&= a\,a^{-1} && [\text{Id}] \\
&= e && [\cancel{\text{Id}}]\,[\text{Inv}]
\end{aligned}
$$

"Sendo"?!?

Quis dizer «<u>Para</u> mostrar que $b^{-1}a^{-1}$ <u>é</u> o inverso...»

Também: precisa unicidade de inversos para esse argumento rodar.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE _____ .

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{Inv}"] \arrow[d, "op(a,b)"'] & a^{-1} \arrow[d, "op(\mathrm{Inv}\,b)"] \\
ab \arrow[r, "\mathrm{Inv}"'] & (ab)^{-1} \text{ ou } a^{-1}b^{-1}
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,].$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DE A1 .

Sejam a, b.
Parte esquerda.
Parte da existência.
Basta demonstrar que $x = ba^{-1}$. Quem é x?!
Como $\boxed{xa = b}$, logo $(ba^{-1})a = b$.
Logo $(ba^{-1})a = b(a^{-1}a)$. [ASS]
Logo $b(a^{-1}a) \underset{(1)}{=} be \underset{(2)}{=} b$. [(1) - Inv (2) - Id].
Parte da unicidade!
Seja x' t.q. $x'a = b$.
Basta demonstrar que $x' = x$.
Como $x'a = b$, logo $(x'a)a^{-1} = ba^{-1}$. [G - Conc]
Logo $(x'a)a^{-1} \underset{(1)}{=} x'(aa^{-1}) \underset{(2)}{=} x'e \underset{(3)}{=} x'$ [(1) - ASS (2) - Inv (3) - Id]
Como $(x'a)a^{-1} = ba^{-1}$ & $ba^{-1} = x$ & $(x'a)a^{-1} = x$, logo $x' = x$.
Parte direita.
Similar.

?!

?! não!

confuso. use "temos"

use rótulos!!!

Uns cálculos também ajudam!

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "Inv \times Inv"] \arrow[d, "op"'] \arrow[dr, phantom, "="] & G \times G \arrow[d, "op"] \\
G \arrow[r, "Inv"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

não é o que tu usou

$\theta(G\text{-}Com) = (\forall a,b,c)[ac = bc \Rightarrow a = b]$ &
$(\forall a,b,c)[ca = cb \Rightarrow a = b]$

Parte esquerda:
Sejam a, b, c t.q. $ac = bc$
calculamos:

$$\begin{aligned} a &= ae \quad [id] \\ &= a(cc^{-1}) \quad [Inv] \\ &= (ac)c^{-1} \quad [Ass] \\ &= (bc)c^{-1} \quad [ac = bc] \\ &= b(cc^{-1}) \quad [Ass] \\ &= be \quad [Inv] \\ &= b \quad [Id]. \end{aligned}$$

✓

Parte direita:
Similar.

(mais simples aplicar $(\cdot c)$ nos dois lados.)

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\ \ \&\ \ (\exists! x)[\,ax = b\,]\,].$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

Sejam $a, b \in G$.

DEMONSTRAÇÃO DE A2 .

Como $(ab)(ab)^{-1} = e$ [inv]

Logo basta demonstrar que

$(ba)(ab)^{-1} = e$. [res]

Calculamos:

$(ba)(ab)^{-1} = (ba)(a^{-1}b^{-1})$ [*]

$= ((ba)a^{-1})b^{-1}$ [assoc]

$= (b(aa^{-1}))b^{-1}$ [assoc]

$= (be)b^{-1}$ [inv]

$= bb^{-1}$ [id]

$= e$ [inv]

$\boxtimes$

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "inv \times inv"] \arrow[d, "op"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & G \times G \arrow[d, "op"] \\
G \arrow[r, "inv"'] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

rel: $(\forall a,b \in G)[(\exists! c)[ac=b] \ \& \ (\exists! c)[ca=b]]$

Sejam $a, b \in G$

Parte existência:

Testemunho $(a^{-1}b)$.

Calculamos:

$$\begin{aligned} a(a^{-1}b) &= (aa^{-1})b && [\text{ass}] \\ &= eb && [\text{inv}] \\ &= b. \end{aligned}$$

Unicidade:

Sejam x, y t.q. $ax = b$ e $ay = b$.

Logo $ax = ay$.

Logo $a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$. [a^{-1} pelo esq].

Logo $(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y$. [assoc]

Logo $ex = ey$ [inv]

Logo $x = y$ [id]

$\boxtimes$