FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 18; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-04-12

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(14) **A**

Escolha um dos **A1**, **A2**.

(10) **A1.** Seja G grupo. Demonstre pelos axiomas o teorema das resoluções únicas:

$$(\forall a, b)\,[\,(\exists! x)[\,xa = b\,]\;\;\&\;\;(\exists! x)[\,ax = b\,]\,]\,.$$

(14) **A2.** Seja G grupo tal que

$$\text{para quaisquer } a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \qquad (*)$$

Demonstre pelos axiomas que G é abeliano.

Demonstração de _____ .

A1. Sejam $a, b \in G$.
Existência:
Calculamos:

$$\begin{aligned}
(ba^{-1})a &= b(a^{-1}a) && \text{(ass.)}\\
&= be && \text{(invL)}\\
&= b && \text{(idR)}
\end{aligned}$$

Unicidade: Seja x tal que $xa = b$.
Basta demonstrar que $x = ba^{-1}$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
ba^{-1} &= (xa)a^{-1} && \text{(escolha de } x\text{)}\\
&= x(aa^{-1}) && \text{(ass)}\\
&= xe && \text{(inv)}\\
&= x && \text{(id)}
\end{aligned}$$

A2. Sejam $a, b \in G$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
ab &= \left((ab)^{-1}\right)^{-1} && \text{(inv-inv)}\\
&= \left(a^{-1}b^{-1}\right)^{-1} && \text{(hip.)}\\
&= \left(b^{-1}\right)^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1} && \text{(inv-op)}\\
&= ba. && \text{(inv-inv)}
\end{aligned}$$

(4) **B**

Desenha um diagrama cuja comutatividade é a proposição $(*)$ do **A2**.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "inv \times inv"] \arrow[d, "op"] & G \times G \arrow[d, "op"] \\
G \arrow[r, "inv"] & G
\end{tikzcd}$$

Só isso mesmo.

(inv-inv).
$(\forall g)\left[\,(g^{-1})^{-1} = g\,\right]$

Demonstração.
Pela (inv-!), basta mostrar que g é inverso de g^{-1}: imediato pelo (inv).

(inv-op).
$(\forall a, b)\left[\,(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}\,\right]$

Demonstração.
Pela (inv-!), basta mostrar que $b^{-1}a^{-1}$ é inverso de ab.
Calculamos:

$$b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}b = e.$$

(inv-!).
Unicidade dos inversos.

Demonstração.
Seja $g \in G$ e seja i inverso de g, ou seja, $ig = e$.
Como $g^{-1}g = e$, logo $i = g^{-1}$ pela (res) (**A1**).