FMC2, 2023.1

(Turma N12 do Thanos)

Prova CFR2.2

(points: 58; bonus: $0^\flat$; time: 58')

Nome:

2023-07-19

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Escolha exatamente dois problemas (letras) para resolver.**[3]

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).

Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Replacement (schema).

Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a, a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \tag{ZF8}$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset)(\exists d \in a)[d \cap a = \emptyset] \tag{ZF9}$$

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(21) E

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

(24) L

*Escolha exatamente **um** dos* **L1**,**L2**,**L3**

Seja L reticulado. Demonstre ...
L1. $a \leq b \implies a \vee (u \wedge b) \leq (a \vee u) \wedge b$
L2. $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$
L3. ... a unicidade de complementos de membros de L, supondo que L é distributivo.
DEMONSTRAÇÃO DE ______ .

(24) **C** *Escolha exatamente* ***um*** *dos* **C1**,**C2**,**C3**,**C4**

Dê um *esboço de construção* com suficientes detalhes para ser seguido por um aluno que passou IDMa, IDMb, IRI, CFR1, CFR2, IEA, mas perdeu as aulas de construções de números.
Construa os números. . .

(21) **C1.** . . . naturais, na teoria de conjuntos axiomática ZF.
(16) **C2.** . . . inteiros, tendo os naturais.
(16) **C3.** . . . racionais, tendo os inteiros.
(24) **C4.** . . . reais, tendo os racionais.

Esboço detalhado da construção ________ .

(34) **R**

Mostre que podemos remover o ZF4 dos axiomas ZF sem perder nada.
Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{\, x \in A \mid \varphi(x) \,\}$.
Resposta.

Só isso mesmo.

Lemmata

Rascunho