FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova CFR2.1
(points: 42; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome:

2023-07-05

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Escolha exatamente dois problemas (letras) para resolver.**[3]

Lembrete:

$$\wp A \overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$
$$\wp_{\mathrm{f}} A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$
$$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$
$$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$

$$A =_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\, B \text{ são equinúmeros}$$
$$A \leq_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} (\exists C)\,[\,C \subseteq B \;\land\; A =_{\mathrm{c}} C\,]$$
$$\iff (\exists f : A \to B)\,[\,f \text{ injetiva}\,]$$
$$(A <_{\mathrm{c}} B) \overset{\text{def}}{\iff} A \leq_{\mathrm{c}} B \;\&\; A \neq_{\mathrm{c}} B.$$

Presente. Podes usar as seguintes equinumerosidades sem demonstrar:

$$\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Z} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Q} =_{\mathrm{c}} \wp_{\mathrm{f}}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^2 =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^*;$$
$$\mathbb{R} =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}^2 =_{\mathrm{c}} (0,1) =_{\mathrm{c}} \wp\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \overline{2}).$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(21) **C** *Escolha exatamente **um** dos **C1**,**C2**,**C3**,**C4**,**C5***

(9) **C1.** $(A \to B) \leq_c \wp(A \times B)$;
(15) **C2.** $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_c \wp\mathbb{N}$;
(21) **C3.** $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$;
(21) **C4.** $(0,1) =_c (0,1]$;
(21) **C5.** $\mathbb{R}_{\geq 0} =_c \mathbb{R}$.

Restrições: para os **C4** e **C5** não podes utilizar o Cantor–Schröder–Bernstein; precisas definir mesmo uma bijeção.
Não precisa demonstrar que tuas funções são realmente injetivas/sobrejetivas/bijetivas; apenas defini-las.
RESPOSTA PARA _____ .

(12) **D**

Sejam as relações seguintes no $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$:

$$f \overset{\mathrm{e}}{=} g \overset{\text{def}}{\iff} f(2n) = g(2n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$
$$f \overset{\mathrm{o}}{=} g \overset{\text{def}}{\iff} f(2k+1) = g(2k+1) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

A relação $(\overset{\mathrm{e}}{=} \diamond \overset{\mathrm{o}}{=})$ é a relação trivial True?
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(21) **E**

Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
Demonstração.

(18) **F**

No conjunto $\mathbb{R}$ sejam as relações definidas pelas:

$$x \smile y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \;\;\&\;\; \neg\,(\exists n \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}})\,[\,x \leq n \leq y\,] \qquad x \frown y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \;\;\&\;\; \neg\,(\exists n \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}})\,[\,x < n < y\,]\,.$$

Sejam $(\ddot{\smile})$ o fecho reflexivo-simétrico da $(\smile)$, e $(\ddot{\frown})$ o fecho simétrico da $(\frown)$.
Uma das $(\ddot{\smile}), (\ddot{\frown})$ é relação de equivalência, a outra não é.

(12) **F1.** Para aquela que é, descreva seu conjunto quociente.
Resposta.

(6) **F2.** Para aquela que não é, refute.
Refutação.

Só isso mesmo.

Rascunho