FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova CFR2.1
(points: 42; bonus: $0^\flat$; time: 48')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-07-05

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Escolha exatamente dois problemas (letras) para resolver.**[3]

Lembrete:

$$\wp A \stackrel{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$
$$\wp_{\mathrm{f}} A \stackrel{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$
$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$
$$\overline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$

$$A =_{\mathrm{c}} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\ B \text{ são equinúmeros}$$
$$A \leq_{\mathrm{c}} B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists C)\,[\,C \subseteq B \ \land\ A =_{\mathrm{c}} C\,]$$
$$\iff (\exists f : A \to B)\,[\,f \text{ injetiva}\,]$$
$$(A <_{\mathrm{c}} B) \stackrel{\text{def}}{\iff} A \leq_{\mathrm{c}} B \ \&\ A \neq_{\mathrm{c}} B.$$

Presente. Podes usar as seguintes equinumerosidades sem demonstrar:

$$\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Z} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Q} =_{\mathrm{c}} \wp_{\mathrm{f}}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^2 =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^*;$$
$$\mathbb{R} =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}^2 =_{\mathrm{c}} (0,1) =_{\mathrm{c}} \wp\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \overline{2}).$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(21) **C** *Escolha exatamente **um** dos **C1**,**C2**,**C3**,**C4**,**C5***

(9) **C1.** $(A \to B) \leq_{\mathrm{c}} \wp(A \times B)$;
(15) **C2.** $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_{\mathrm{c}} \wp\mathbb{N}$;
(21) **C3.** $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}$;
(21) **C4.** $(0,1) =_{\mathrm{c}} (0,1]$;
(21) **C5.** $\mathbb{R}_{\geq 0} =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}$.

Restrições: para os **C4** e **C5** não podes utilizar o Cantor–Schröder–Bernstein; precisas definir mesmo uma bijeção.
Não precisa demonstrar que tuas funções são realmente injetivas/sobrejetivas/bijetivas; apenas defini-las.
Resposta para todas .

C1. *graph*

C2. Por CBS.
$(\to)$: $\lambda f \,.\, \{\, 2^n 3^{fn} \mid n \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}} \,\}$
$(\leftarrow)$: $\lambda A \,.\, \chi_A$

C5. $\lambda x \,.\, f\,x + (x - \lfloor x \rfloor)$,
onde $f : \mathbb{R}_{\mathbb{N}} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$.

C3. Aproveitamos: (1) $(=_{\mathrm{c}})$ congruência para $(\to)$; (2) Currificação.
Basta$^{(1)}$ mostrar $(\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \overline{2})) =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \overline{2})$.
Basta$^{(2)}$ mostrar $((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \overline{2})) =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \overline{2})$.
Basta$^{(1)}$ mostrar $\mathbb{N}^2 =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$, que é um dos presentes desta prova.

C4. $\lambda x \,.\, \textbf{if } x \in \{\, 1/2^n \mid n \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}} \,\} \textbf{ then } 2x \textbf{ else } x$.

(12) **D**

Sejam as relações seguintes no $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$:

$$f \overset{\mathrm{e}}{=} g \overset{\mathrm{def}}{\iff} f(2n) = g(2n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$
$$f \overset{\mathrm{o}}{=} g \overset{\mathrm{def}}{\iff} f(2k+1) = g(2k+1) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

A relação $(\overset{\mathrm{e}}{=} \diamond \overset{\mathrm{o}}{=})$ é a relação trivial True?
Demonstração/refutação.

Sejam $f, g \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$. A $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pela

$$h(n) = \begin{cases} f(n), & \text{caso } n \text{ par} \\ g(n), & \text{caso } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

satisfaz as $f \overset{\mathrm{e}}{=} h \overset{\mathrm{o}}{=} g$, testemunhando assim que $f \left(\overset{\mathrm{e}}{=} \diamond \overset{\mathrm{o}}{=}\right) g$.

(21) E

Seja $f : A \to B$. Demonstre: f épica $\implies$ f sobrejetiva.
DEMONSTRAÇÃO.

Suponha f épica.
Seja $b \in B$. Procuro $a \in A$ tal que $f\,a = b$.
Sejam $g, h : B \to \{0, 1\}$ definidas pelas:

$$g\,x \overset{\text{def}}{=} 0 \qquad\qquad h\,x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{caso } x = b; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que g, h discordam apenas no b. (1)
Logo $g \neq h$.
Logo $gf \neq hf$ (pois f épica).
Logo gf, hf discordam em algum ponto do A.
Logo seja $d \in A$ tal ponto, i.e.: $(gf)\,d \neq (hf)\,d$.
Logo $g\,(f\,d) \neq h\,(f\,d)$.
Ou seja, g, h discordam no $f\,d$.
Logo $f\,d = b$. [pela (1)]

(18) F

No conjunto $\mathbb{R}$ sejam as relações definidas pelas:

$$x \smile y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \;\&\; \neg(\exists n \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}})\,[\,x \leq n \leq y\,] \qquad x \frown y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \;\&\; \neg(\exists n \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}})\,[\,x < n < y\,].$$

Sejam $(\ddot{\smile})$ o fecho reflexivo-simétrico da $(\smile)$, e $(\ddot{\frown})$ o fecho simétrico da $(\frown)$.
Uma das $(\ddot{\smile}), (\ddot{\frown})$ é relação de equivalência, a outra não é.

(12) **F1.** Para aquela que é, descreva seu conjunto quociente.
RESPOSTA.

A $(\ddot{\smile})$ é. Seu conjunto quociente:

$$\{\,(n, n+1) \mid n \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}\,\} \cup \{\,\{n\} \mid n \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}\,\}.$$

(6) **F2.** Para aquela que não é, refute.
REFUTAÇÃO.

A $(\ddot{\frown})$ não é, pois não é transitiva.
Observe que $0 \mathrel{\ddot{\frown}} 1$, pois não existe real inteiro no $(0, 1)$, e similarmente $1 \mathrel{\ddot{\frown}} 2$.
Mas $0 \mathrel{\not\ddot{\frown}} 2$, pois 1 é real inteiro e $1 \in (0, 2)$.

Só isso mesmo.

Lemmata