FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 82; bonus: $0^\flat$; time: 82')

Nome:

2023-05-26

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Das $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$, pode escolher até 2.**[3]

Definição. Seja S um conjunto e $\mathscr{C} \subseteq \wp S$. Chamamos a $\mathscr{C}$ de *partição de S* sse:
(Par-1) $\emptyset \notin \mathscr{C}$;
(Par-2) os membros de $\mathscr{C}$ são disjuntos dois-a-dois;
(Par-3) $\bigcup \mathscr{C} = S$.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "square \times double"] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "square"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"]
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?
Resposta.

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.
Demonstração.

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathscr{A}}$ uma $\mathscr{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathscr{A}$, P_A é uma partição de A.
Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} P_A$ é uma partição de X.
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i)	f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;	(iii)	$g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;
(ii)	f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;	(iv)	$g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA _____ .

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA _____ .

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \;\mid\; x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

Demonstração de $f[F] \subseteq F$.

Demonstração de $f[F] \supseteq F$.

Demonstração de $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Demonstração de $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Só isso mesmo.

Rascunho