FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 82; bonus: $0^\flat$; time: 82')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-05-26

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Das $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$, pode escolher até 2.**[3]

Definição. Seja S um conjunto e $\mathscr{C} \subseteq \wp S$. Chamamos a $\mathscr{C}$ de *partição de S* sse:
(Par-1) $\emptyset \notin \mathscr{C}$;
(Par-2) os membros de $\mathscr{C}$ são disjuntos dois-a-dois;
(Par-3) $\bigcup \mathscr{C} = S$.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **O**

Um professor de ensino médio/fundamental ensinou uma "identidade" para seus alunos. Um aluno de FMC2 que tava presente na aula afirmou corretamente que, no final das contas, o professor ensinou apenas que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "succ"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[rr, "square \times double"] & & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[d, "(+)"] \\
\mathbb{N} \arrow[rr, "square"'] & & \mathbb{N} & \mathbb{N} \arrow[l, "succ"]
\end{tikzcd}$$

Qual foi a identidade que o professor ensinou para seus alunos?

RESPOSTA.

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

(36) **C**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Chamamos a f de L-cancelável sse para qualquer conjunto D e quaisquer $g, h : D \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Demonstre: f injetora $\iff$ f L-cancelável.

DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$): Sejam $g, h : D \to A$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Vamos mostrar que $g = h$.
Seja $d \in D$. Calculamos:

$$f\,(g\,d) = (f \circ g)\,d = (f \circ h)\,d = f\,(h\,d).$$

Logo, como f injetora, $g\,d = h\,d$.

($\Leftarrow$): Suponha $a, a' \in A$ tais que $f\,a = f\,a'$ (1).
Basta mostrar que $a = a'$.
Considere as funções constantes $\mathrm{k}_a, \mathrm{k}_{a'} : \{\star\} \longrightarrow A$.
Calculamos:

$$(f \circ \mathrm{k}_a)\,\star = f\,(\mathrm{k}_a\,\star) = f\,a \overset{(1)}{=} f\,a' = f\,(\mathrm{k}_{a'}\,\star) = (f \circ \mathrm{k}_{a'})\,\star\,.$$

Logo $f \circ \mathrm{k}_a = f \circ \mathrm{k}_{a'}$ e logo $\mathrm{k}_a = \mathrm{k}_{a'}$ (pois f L-cancelável).
Logo as $\mathrm{k}_a, \mathrm{k}_{a'}$ concordam no $\star$, ou seja, $a = a'$.

(34) **D**

Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma partição de X. Seja $(P_A)_{A\in\mathscr{A}}$ uma $\mathscr{A}$-indexada família de coleções de subconjuntos de X tal que para todo $A \in \mathscr{A}$, P_A é uma partição de A.
Demonstre ou refute: $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} P_A$ é uma partição de X.
DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

Seja $\mathscr{P} = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} P_A$. Vou demonstrar que $\mathscr{P}$ é uma partição do X.

(Par-1): Suponha $\emptyset \in \mathscr{P}$. Logo $\emptyset$ pertence àlguma das P_A's, contradizendo seu (Par-1).

(Par-2): Sejam $U, V \in \mathscr{P}$ e seja $w \in U \cap V$; preciso $U = V$.
Sejam $A_U, A_V \in \mathscr{A}$ tais que $U \in P_{A_U}$ e $V \in P_{A_V}$.
Como P_{A_U} é uma partição do A_U e U é um membro dela, logo $U \subseteq A_U$ ((Par-0) da P_{A_U}), logo $w \in A_U$. Similarmente $w \in A_V$.
Como $\mathscr{A}$ partição e w pertence aos membros dela A_U e A_V, logo $A_U = A_V$ ((Par-2) da $\mathscr{A}$).
Logo $P_{A_U} = P_{A_V}$, e logo os U, V pertencem à mesma partição ($P_{A_U} = P_{A_V}$), e se intersetam, portanto $U = V$ ((Par-2) da P_{A_U}).

(Par-3): ($\subseteq$): Seja $u \in \bigcup \mathscr{P}$.
Logo seja $U \in \mathscr{P}$ tal que $u \in U$.
Logo seja $A_U \in \mathscr{A}$ tal que $U \in P_{A_U}$.
Como U pertence à partição P_{A_U} do A_U, logo $U \subseteq A_U$ ((Par-0) de P_{A_U}).
Como A_U pertence à partição $\mathscr{A}$ do X, logo $A_U \subseteq X$ ((Par-0) de $\mathscr{A}$).
Temos então: $u \in U \subseteq A_U \subseteq X$.

($\supseteq$): Seja $x \in X$.
Logo seja $A_x \in \mathscr{A}$ tal que $x \in A_x$ ((Par-3) de $\mathscr{A}$).
Logo seja $U \in P_{A_x}$ tal que $x \in U$ ((Par-3) de P_{A_x})).
Como $U \in P_{A_x}$ logo U pertence àlgum dos P_A's, ou seja, $U \in \mathscr{P}$.
Agora temos $x \in U \in \mathscr{P}$.
Logo $x \in \bigcup \mathscr{P}$.

(18) **E**

Para quaisquer $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

(i) f, g injetivas $\implies g \circ f$ injetiva;
(ii) f, g sobrejetivas $\implies g \circ f$ sobrejetiva;
(iii) $g \circ f$ bijetiva $\implies f$ injetiva;
(iv) $g \circ f$ bijetiva $\implies g$ injetiva.

Demonstre/refute **até duas** das (i)–(iv):

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ______ .

(i) Sejam a, a' tais que $(g \circ f)\, a = (g \circ f)\, a'$.
Logo $g\,(f\,a) = g\,(f\,a')$.
Logo $f\,a = f\,a'$ (g injetiva).
Logo $a = a'$ (f injetiva).

(ii) Seja $c \in C$.
Logo seja $b \in B$ tal que $b \overset{g}{\longmapsto} c$ (g sobre).
Logo seja $a \in A$ tal que $a \overset{f}{\longmapsto} b$ (f sobre).
Calculamos: $(g \circ f)\, a = g\,(f\,a) = g\,b = c$.

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO DA ______ .

(iii) Sejam $a, a' \in A$ tais que $f\,a = f\,a'$.
Logo $g\,(f\,a) = g\,(f\,a')$ (g função).
Logo $(g \circ f)\, a = (g \circ f)\, a'$.
Logo $a = a'$ ($(g \circ f)$ injetiva).

(iv) REFUTAÇÃO.
Considere $\{0\} \xrightarrow{i} \{0,1\} \xrightarrow{\mathrm{k}_0} \{0\}$.
Observe que $\mathrm{k}_0 \circ i = \mathrm{id}_{\{0\}}$, que é bijetiva, mas a $\mathrm{k}_0 : \{0,1\} \to \{0\}$ não é injetiva.

(24) **F**

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f.

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}$$

Demonstre as igualdades seguintes

$$f[F] = F \qquad\qquad f^{-1}[F] = F$$

Em *exatamente uma das* 4 inclusões, podes assumir como hipotese extra que f é injetiva, ou que f é sobrejetiva (tua escolha). Deixe isso claro na primeira linha da tua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \subseteq F$.

Seja $y \in f[F]$.
Logo tome $p \in F$ tal que $f\,p = y$ (1) (pela definição da funcção-imagem).
Logo p é um fixpoint da f, ou seja, $f\,p = p$ (2).
Juntando as (1) e (2), ganhamos $p = y$, ou seja y é um fixpoint da f, portanto $y \in F$.

DEMONSTRAÇÃO DE $f[F] \supseteq F$.

Seja $p \in F$.
Logo $f\,p \in f[F]$ (pela definição da funcção-imagem).
Mas p é um fixpoint da f (pois $p \in F$), ou seja, $f\,p = p$.
Logo $p \in f[F]$.

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \subseteq F$.

Com hipótese extra: f injetora.
Seja $a \in f^{-1}[F]$.
Logo $f\,a \in F$, ou seja, $f\,a$ é um fixpoint da f, ou seja, $f\,(f\,a) = f\,a$.
Como f é injetora, logo $f\,a = a$, ou seja, a é um fixpoint da f também, portanto $a \in F$.

DEMONSTRAÇÃO DE $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $p \in F$, ou seja p é um fixpoint da f.
Logo $f\,p = p \in F$, e logo $p \in f^{-1}[F]$.

Só isso mesmo.