FMC2, 2023.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 18; bonus: $0^\flat$; time: 32')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2023-04-14

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. **Escolha 1 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.**[3]

Definição. Seja $\mathscr{A}$ uma família de conjuntos. Chamamos a $\mathscr{A}$ de $\subseteq$-chain sse

$$\text{para todo } A, B \in \mathscr{A}, \text{ temos } A \subseteq B \text{ ou } B \subseteq A.$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(18) **A**

(4) **A1.** Defina a união de seqüência de conjuntos.

DEFINIÇÃO.

Seja $(A_n)_n$ uma seqüência de conjuntos. Sua união $\bigcup_n A_n$ é o conjunto de todos os x tais que $x \in A_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Em símbolos:

$$x \in \bigcup_n A_n \overset{\text{def}}{\iff} (\exists i \in \mathbb{N})\,[\, x \in A_i \,]\,.$$

(14) **A2.** Sejam I um conjunto de índices, $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ famílias indexadas de conjuntos, tais que para todo $i \in I$, $A_i \subseteq B_i$. Considere a proposição: $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} B_i$. Se for demonstrável, demonstre; se for refutável, refute; se os dados são insuficientes para concluir, mostre isso.

RESPOSTA.

Vou demonstrar a proposição.
Seja $t \in \prod_{i \in I} A_i$.
Preciso demonstrar que $t \in \prod_{i \in I} B_i$, ou seja que para todo $i \in I$, $\pi_i t \in B_i$.
Seja $i \in I$. Pela escolha de t, $\pi_i t \in A_i$. Mas $A_i \subseteq B_i$, e logo $\pi_i t \in B_i$.

(18) **B**

(4) **B1.** Defina o produto de família indexada de conjuntos.

DEFINIÇÃO.

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família indexada de conjuntos. Seu produtório $\prod_{i \in I} A_i$ é o conjunto de todas as I-tuplas $(a_i)_{i \in I}$ tais que para todo $i \in I$, $a_i \in A_i$:

$$\prod_{i \in I} A_i \overset{\text{def}}{=} \{\, (a_i)_{i \in I} \;\mid\; (\forall i \in I)\,[\, a_i \in A_i \,]\,\}\,.$$

(14) **B2.** Sejam I um conjunto de índices, A um conjunto, e $(B_i)_{i \in I}$ uma família indexada de conjuntos. Demonstre: $A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$.

DEMONSTRAÇÃO.

($\subseteq$): Seja $u \in A \cup \bigcap_{i \in I} B_i$. Seja $i \in I$. Basta demonstrar que $u \in A \cup B_i$, ou seja, que $u \in A$ ou $u \in B_i$.
Pela escolha de u, separo em casos:
Caso $u \in A$: Imediato.
Caso $u \in \bigcap_{i \in I} B_i$. Logo $u \in B_i$, e agora é imediato.

($\supseteq$): Seja $x \in \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$.
Separo em casos (LEM):
Caso $x \in A$: Imediato.
Caso $x \notin A$: Vou demonstrar que para todo $i \in I$, $x \in B_i$. Seja $i \in I$. Logo $x \in A \cup B_i$. Como $x \notin A$, logo $x \in B_i$.

Só isso mesmo.