
Nome: Θάνος

Gabarito

2022-07-20

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$.²
- VI. Responda dentro das caixas indicadas.
- VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- IX. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.³

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(72) **K**

- (72) Sejam grupos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Demonstre que o $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in \mathcal{A} \mid \varphi a = e_B \}$ é um subgrupo normal do $\mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Subconjunto. Imediato pela sua definição.

Subgrupo. Primeiramente observamos que $\ker \varphi \neq \emptyset$: $e_A \in \ker \varphi$, pois φ é um homomorfismo e logo leva a e_A para a e_B . Usarei o critério one-test. Sejam $x, y \in \ker \varphi$. Precisamos mostrar que $xy^{-1} \in \ker \varphi$, ou seja, que $\varphi(xy^{-1}) = e_B$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(xy^{-1}) &= \varphi(x)\varphi(y^{-1}) && (\varphi \text{ homo (oper.)}) \\ &= \varphi(x)(\varphi(y))^{-1} && (\varphi \text{ homo (inv.)}) \\ &= e_B(e_B)^{-1} && (x, y \in \ker \varphi) \\ &= e_B. && (\text{def. } (e_B)^{-1}) \end{aligned}$$

Normal. Seja $k \in \ker \varphi$ e tome $a \in \mathcal{A}$. Precisamos demonstrar que o a -conjugado de k também está no $\ker \varphi$: $aka^{-1} \in \ker \varphi$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \varphi(aka^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) && (\varphi \text{ homo}) \\ &= \varphi(a)e_B\varphi(a^{-1}) && (k \in \ker \varphi) \\ &= \varphi(a)\varphi(a^{-1}) && (\text{def. } e_B) \\ &= \varphi(a)(\varphi(a))^{-1} && (\varphi \text{ homo}) \\ &= e_B && (\text{def. } (\varphi(a))^{-1}) \end{aligned}$$

Logo $aka^{-1} \in \ker \varphi$ como queremos demonstrar.

(28) **L**

Seja $\mathcal{L} = \langle \mathcal{L} ; \vee, \wedge \rangle$ um *lattice*, ou seja:

$$\begin{array}{ll} \text{associatividade} & \left\{ \begin{array}{l} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \end{array} \right. \\ \text{idempotência} & \left\{ \begin{array}{l} a \vee a = a \\ a \wedge a = a \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a \vee b = b \vee a \\ a \wedge b = b \wedge a \end{array} \right\} \text{comutatividade} \\ \left. \begin{array}{l} a \vee (a \wedge b) = a \\ a \wedge (a \vee b) = a \end{array} \right\} \text{absorção} \end{array}$$

(14) **L1.** Demonstre que:

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a.$$

DEMONSTRAÇÃO.

“ $\Rightarrow$ ”: Suponha $b = a \vee b$. Calculamos

$$\begin{array}{ll} a \wedge b = a \wedge (a \vee b) & (\text{Hyp.}) \\ = (a \vee b) \wedge a & (\text{Com2}) \\ = a & (\text{Abs1}) \end{array}$$

“ $\Leftarrow$ ”: Similar.

(14) **L2.** Demonstre que podemos inferir as leis (Idem1)–(Idem2) pelas outras.

Dica: Custa 6 pontos. $a \vee (a \wedge (a \vee a))$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $a \in L$. Calculamos

$$a \vee ((a \vee a) \wedge a) = a \vee a \quad (\text{Abs2})$$

e também

$$\begin{array}{ll} a \vee ((a \vee a) \wedge a) = ((a \vee a) \wedge a) \vee a & (\text{Com1}) \\ = (a \wedge (a \vee a)) \vee a & (\text{Com2}) \\ = a & (\text{Abs1}) \end{array}$$

Logo $a \vee a = a$.

Similarmente, $a \wedge a = a$.

Só isso mesmo.