
Nome:

2022-06-06

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $(\forall x) [\text{Colar}(x) \implies \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2})]$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.
- XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.³
- XII. Escolhe até 2 dos I, J, K.⁴

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(16) **I**

Aqui deixe sem demonstrar que as funções que definiu têm as propriedades necessárias (bijetividade para as $=_c$ e injetividade para as $\leq_c$) ou seja: apenas defina corretamente. Na parte de verificação que teus contraexemplos são válidos mesmo, calcule o suficiente para deixar claras as $\neq_c$.

(12) **I1.** Sejam A, B, C conjuntos tais que $A =_c B$ e $B =_c C$. Defina funções que mostrem as relações cardinais corretas, ou contraexemplos que mostrem que não tem como:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| (i) $A =_c B$; | (iii) $A =_c C$; | (v) $B =_c C$; |
| (ii) $A \leq_c B$; | (iv) $A \leq_c C$; | (vi) $B \leq_c C$. |

RESPOSTA.

(4) **I2.** Sejam A, B, C conjuntos. Para **uma** das seguintes, defina função que a estabelece:

- | | |
|-----|--------------------|
| (2) | (i) $A \leq_c B$; |
| (2) | (ii) $A =_c B$; |
| (4) | (iii) $A =_c C$. |

RESPOSTA.

(16) **J**

(10) **J1.** Para qualquer conjunto A , $\aleph_0 \leq \aleph_0^{|A|}$.
DEMONSTRAÇÃO.

(6) **J2.** Definimos recursivamente $\aleph_\alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}$ por

$$\begin{aligned}\aleph_0 &= \aleph_0 \\ \aleph_{\alpha+1} &= \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha}.\end{aligned}$$

Seja $\aleph_\alpha$. Demonstre que $\aleph_\alpha$ cardinalidade $\aleph_\alpha$ qualquer $\aleph_\beta$ $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$.
DEMONSTRAÇÃO.

$$(16) \quad \mathbf{K}$$

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois conjuntos. Demonstre a equivalência:

$$\text{[redacted]} \iff f \in \text{[redacted]}$$

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.