FMC2, 2022.1
(Turma N34 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 32; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-06-06

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.[3]

XII. Escolhe até 2 dos $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$.[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(16) # I

Aqui deixe sem demonstrar que as funções que definiu têm as propriedades necessárias (bijetividade para as $=_c$ e injetividade para as $\leq_c$) ou seja: apenas defina corretamente. Na parte de verificação que teus contraexemplos são válidos mesmo, calcule o suficiente para deixar claras as $\neq_c$.

(12) **I1.** Sejam A, A', B, B' conjuntos tais que $A =_c A'$ e $B =_c B'$. Defina funções que mostram as relações cardinais corretas, ou contraexemplos que mostram que não tem como:

(i) $A \cup B =_c A' \cup B'$;
(ii) $A \cap B =_c A' \cap B'$;
(iii) $A \times B =_c A' \times B'$;
(iv) $(A \to B) =_c (A' \to B')$;
(v) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$;
(vi) $\wp A =_c \wp A'$.

Resposta.

(i)–(ii) Contraexemplos.
Sejam $A = A' = B = \{1\}$ e $B' = \{2\}$. Logo

$$A \cup B = \{1\} \neq_c \{1,2\} = A' \cup B'; \qquad A \cap B = \{1\} \neq_c \emptyset = A' \cap B'.$$

Sobre as outras eu vou definir bijeções mesmo.
Como $A =_c A'$ e $B =_c B'$, logo sejam $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A'$ e $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B'$. Defino:

$$f \times g : A \times B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A' \times B'; \qquad \lambda p \,.\, g\, p\, f^{-1} : (A \to B) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (A' \to B');$$
$$f + g : A \uplus B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A' \uplus B'; \qquad \wp f : \wp A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \wp A'.$$

(4) **I2.** Sejam A, B, C conjuntos. Para **uma** das seguintes, defina função que a estabelece:

(2) (i) $(A \to B) \leq_c \wp(A \times B)$;

(2) (ii) $((A \times B) \to B) =_c (A \to (B \to C))$;

(4) (iii) $(0, 1] =_c (0, 1)$.

Resposta.

$$\mathrm{graph} : (A \to B) \rightarrowtail \wp(A \times B);$$
$$\mathit{curry} : ((A \times B) \to C) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (A \to (B \to C));$$
$$\lambda x \,.\, \mathsf{if}\ x \in P\ \mathsf{then}\ x/2\ \mathsf{else}\ x : (0,1] \rightarrowtail (0,1); \quad \text{onde } P = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}.$$

(16) **J**

(10) **J1.** Para qualquer conjunto A, $A <_c \wp A$.
DEMONSTRAÇÃO.

Preciso demonstrar duas coisas: (i) $A \leq_c \wp A$; (ii) $A \neq_c \wp A$.

O (i) é imediato pela função $(a \mapsto \{a\})$.

Para o (ii) basta demonstrar que qualquer $\pi : A \to \wp A$ *não* é sobrejetiva.
Seja $\pi : A \to \wp A$ então e considere o conjunto

$$D = \{\, d \in A \mid d \notin \pi\, d \,\}\,.$$

Como $D \in \operatorname{cod}(\pi)$, basta demonstrar que $D \notin \operatorname{range}(f)$.
Logo, para chegar numa contradição, suponha $D \in \operatorname{range}(f)$.
Logo seja $t \in A$ tal que $\pi\, t = D$.
Logo temos:

$$\begin{aligned} t \in D &\iff t \notin \pi\, t && \text{(pela definição de } D\text{)} \\ &\iff t \notin D. && \text{(pela escolha de } t\text{)} \end{aligned}$$

que é uma contradição.

(6) **J2.** Definimos recursivamente a seqüência de conjuntos: $\mathbb{N}, \wp\mathbb{N}, \wp\wp\mathbb{N}, \dots$:

$$\begin{aligned} T_0 &= \mathbb{N} \\ T_{n+1} &= \wp T_n. \end{aligned}$$

Seja $T_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$. Demonstre que T_ω tem cardinalidade estritamente maior de qualquer um dos conjuntos da seqüência $(T_i)_i$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos:

$$\begin{aligned} T_n &<_c T_{n+1} && \text{(pelo teorema de Cantor (\textbf{J1}))} \\ &\leq_c T_\omega. && \text{(pois } T_{n+1} \subseteq T_\omega\text{)} \end{aligned}$$

(16) **K**

Sejam $B \xrightarrow{f} C$. Demonstre a equivalência:

$$f \text{ injetora} \iff f \text{ é } (\circ)\text{-cancelável pela esquerda.}$$

Demonstração.

($\Rightarrow$): Suponha f injetora e sejam $g, h : A \to B$ com $f \circ g = f \circ h$.
Preciso demonstrar $g = h$.
Seja $a \in A$.
Basta verificar $g\ a = h\ a$.
Como $f \circ g = f \circ h$, logo $(f \circ g)\ a = (f \circ h)\ a$.
Logo $f\ (g\ a) = f\ (h\ a)$.
Logo $g\ a = h\ a$.

($\Rightarrow$): Suponha f $(\circ)$-cancelável pela esquerda.
Preciso demonstrar que f é injetiva.
Sejam $b, b' \in B$ tais que $f\ b = f\ b'$.
Basta demonstrar que $b = b'$.
Sejam $\overline{b}, \overline{b'} : \{\star\} \to B$ definidas pelas

$$\overline{b}\ \star = b \qquad\qquad \overline{b'}\ \star = b'.$$

Vou confirmar que $f \circ \overline{b} = f \circ \overline{b'}$.
Basta verificar que concordam no único ponto do seu domínio; realmente:

$$(f \circ \overline{b})\ \star = f\ (\overline{b}\ \star) = f\ b = f\ b' = f\ (\overline{b'}\ \star) = (f \circ \overline{b'})\ \star\,.$$

Como f é $(\circ)$-cancelável pela esquerda, concluímos que $\overline{b} = \overline{b'}$, e
logo $\overline{b}\ \star = \overline{b'}\ \star$, ou seja $b = b'$.

Só isso mesmo.