FMC2, 2022.1
(Turma N34 do Thanos)

Prova 1.3
(points: 42; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-05-23

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.[3]

XII. **Escolhe até 2 dos $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$.**[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas violando essa regra (com respostas em mais problemas) não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(21) **F**

Sejam $f : A \to A$, e F o conjunto de todos os fixpoints da f:

$$F = \{\, x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \,\}.$$

(8) **F1.** Demonstre: $f[F] = F$.
DEMONSTRAÇÃO.

Demonstração de $f[F] \subseteq F$.
Seja $y \in f[F]$. Logo tome $p \in F$ tal que $f(p) = y$ ⁽¹⁾ (pela definição da funcção-imagem). Logo p é um fixpoint da f, ou seja, $f(p) = p$ ⁽²⁾. Juntando as (1) e (2), ganhamos $p = y$, ou seja y é um fixpoint da f, e logo $y \in F$.

Demonstração de $f[F] \supseteq F$.
Seja $p \in F$. Logo $f(p) \in f[F]$ (pela definição da funcção-imagem). Mas p é um fixpoint da f (pois $p \in F$), ou seja $f(p) = p$. Logo $p \in f[F]$.

(5) **F2.** Demonstre: $f^{-1}[F] \supseteq F$.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $p \in F$, ou seja p é um fixpoint da f. Logo $f(p) = p \in F$, e logo $p \in f^{-1}[F]$.

(8) **F3.** Demonstre que $f^{-1}[F] \subseteq F$ escolhendo **um** extra dado dos:
(i) f é injetora; (ii) f é sobrejetora.
DEMONSTRAÇÃO COM EXTRA DADO (i) .

Seja $a \in f^{-1}[F]$. Logo $f(a)$ é um fixpoint da f. Ou seja, $f(f(a)) = f(a)$ Agora, como f é injetora, temos $f(a) = a$, ou seja, a é um fixpoint também e logo $a \in F$.

(21) **G**

Sejam $A \xrightarrow{f} B$. Demonstre:

$$f(-) \text{ sobrejetora} \iff f^{-1}[-] \text{ injetora.}$$

DEMONSTRAÇÃO.

($\Rightarrow$): Suponha f sobrejetora e sejam Y, Y' no $\mathrm{dom}(f^{-1}[-])$ tais que $Y \neq Y'$. (Temos então $Y, Y' \subseteq B$.) Basta demonstrar que $f^{-1}[Y] \neq f^{-1}[Y']$. Como $Y \neq Y'$, sem perda de generalidade, seja $d \in Y \setminus Y'$. Como f é sobrejetora, seja $a_d \in A$ tal que $f(a_d) = d$. Observe que $f(a_d) \in Y$ e que $f(a_d) \notin Y'$. Logo $a_d \in f^{-1}[Y]$ e $a_d \notin f^{-1}[Y']$, pela definição da $f^{-1}[-]$. Logo $f^{-1}[Y] \neq f^{-1}[Y]'$.

($\Leftarrow$): Suponha f^* injetora. Seja $b \in B$. Procuro $a \in A$ tal que $fa = b$. Como $f^*\emptyset = \emptyset$ e f^* injetora, logo $f^*\{b\} \neq \emptyset$ e logo seja $a \in f^*\{b\}$. Logo $fa \in \{b\}$, logo $fa = b$.

(21) **H**

Seja $f : A \to A$ endomapa tal que $f^3 = \mathsf{id}_A$.

(7) **H1.** Dê um exemplo disso, com $f \neq \mathsf{id}_A$.
Exemplo.

Seja $A = \{0, 1, 2\}$ e f o "sucessor módulo 3":

$$0 \overset{f}{\mapsto} 1 \overset{f}{\mapsto} 2 \overset{f}{\mapsto} 0.$$

(14) **H2.** A afirmação

f é bijetora

é verdadeira?
Responda «sim» e demonstre; «não» e refute; ou, se os dados não são suficientes para concluir, responda «depende» e mostre um exemplo e um contraexemplo.
Resposta.

Sim.

Injetoridade. Sejam $a, a' \in A$ tais que $fa = fa'$.
Logo (aplicando a f nos dois lados) $f(fa) = f(fa)$.
Logo (mais uma vez) $f(f(fa)) = f(f(fa))$.
Ou seja, $(fff)a = (fff)a'$ pela associatividade da $\circ$ e sua definição.
Mas $fff = f^3 = \mathsf{id}_A$. Logo $\mathsf{id}_A a = \mathsf{id}_A a'$ e logo $a = a'$.

Sobrejetoridade. Seja $y \in A$.
Procuro membro de A que f mapeia para o y.
Afirmo que um tal membro é o $(ff)y$.
Confirmo:

$$\begin{aligned}
f\big((ff)y\big) &= (f^3)y && \text{(def. } f^3\text{)} \\
&= \mathsf{id}_A y && \text{(hipótese)} \\
&= y. && \text{(def. } \mathsf{id}_A\text{)}
\end{aligned}$$

Só isso mesmo.