FMC2, 2022.1
(Turma N34 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 34; bonus: $0^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος **Gabarito**

2022-05-06

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

XI. Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.[3]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(24) **D**

Escolhe **exatamente um** dos **D1**, **D2**.

(24) **D1.** Seja $(A_n)_n$ uma seqüência de conjuntos. Definimos os conjuntos

$$A_* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j \qquad A^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j.$$

Demonstre que $A_* \subseteq A^*$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $x \in A_* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$. Logo seja $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{j=i_0}^{\infty} A_j$. Sabemos então que

$$(\forall j \geq i_0)\,[\, x \in A_j \,]\,. \tag{*}$$

Queremos demonstrar que $x \in A^* = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$. Seja então $n_0 \in \mathbb{N}$. Agora basta demonstrar que

$$x \in \bigcup_{j=n_0}^{\infty} A_j.$$

Em outras palavras, procuramos um $k \in \mathbb{N}$ que satisfaz: $k \geq n_0$ e $x \in A_k$. Tome $k := \max\{i_0, n_0\}$ e observe que esse k satisfaz ambas as condições. Pela escolha de k a primeira condição é satisfeita imediatamente. Sobre a segunda, como $k \geq i_0$, pela (*) temos que $x \in A_k$, que foi o que queremos demonstrar.

(24) **D2.** Sejam A conjunto e $(B_n)_n$ seqüência de conjuntos. Demonstre que para todo conjunto A e toda seqüência de conjuntos $(B_n)_n$

$$A \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (A \cup B_n).$$

DEMONSTRAÇÃO.

($\subseteq$): Suponha $x \in A \cup \bigcap_n B_n$, ou seja,

$$x \in A \text{ ou } x \in \bigcap_n B_n. \tag{1}$$

Preciso demonstrar que para todo $m \in \mathbb{N}$, $x \in A \cup B_m$.
Seja $m \in \mathbb{N}$. Vou demonstrar que $x \in A \cup B_m$, ou seja, que $x \in A$ ou $x \in B_m$.
Graças à (1), separo em casos:
CASO $x \in A$. Imediato.
CASO $x \in \bigcap_n B_n$, ou seja,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \in B_n,$$

logo (com $n := m$) $x \in B_m$.

($\supseteq$): Suponha $x \in \bigcap_n (A \cup B_n)$, ou seja,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \in A \cup B_n. \tag{2}$$

Preciso demonstrar que $x \in A \cup \bigcap_n B_n$, ou seja: $x \in A$ ou $x \in \bigcap_n B_n$.
SEPARO EM CASOS. (LEM)
CASO $x \in A$: Imediato.
CASO $x \notin A$: Preciso demonstrar que $x \in \bigcap_n B_n$.
Seja $m \in \mathbb{N}$. Basta demonstrar que $x \in B_m$.
Pela (2) (com $n := m$) temos $x \in A \cup B_m$, ou seja, $x \in A$ ou $x \in B_m$.
Mas $x \notin A$ (hipotese), logo $x \in B_m$.

(10) **E**

(4) **E1.** Dados tipos A, B, C e sem saber nada mais sobre eles, defina funções:

$$\begin{aligned}
\text{flurry} &: ((A \times B) \to C) \longrightarrow (B \to (A \to C)) \\
\text{flurry} &= \boxed{\lambda f\,.\,\lambda b\,.\,\lambda a\,.\,f\ (a, b)} \\
\text{weaker} &: ((A \to C) \times (B \to C)) \longrightarrow ((A \times B) \to C) \\
\text{weaker} &= \boxed{\lambda t\,.\,\lambda w\,.\,(\mathit{outl}\ t)\ \ (\mathit{outl}\ w)}
\end{aligned}$$

(6) **E2.** Mostrando o cálculo passo-a-passo, sublinhando em cada passo o redex escolhido, e especificando qual das $\rhd_\beta$, $\rhd_\eta$, $\rhd_c$ está sendo usada...:
(i) ache a forma normal ("valor final") da expressão seguinte:
$(\lambda x\,.\,2 + (\lambda y\,.\,3 \cdot y)\ \ (x^2))\ \ 3$

$$\begin{array}{l}
\underline{(\lambda x\,.\,2 + (\lambda y\,.\,3 \cdot y)\ \ (x^2))\ \ 3} \\
\rhd_\beta\ 2 + \underline{(\lambda y\,.\,3 \cdot y)\ \ (3^2)} \\
\rhd_\beta\ \underline{2 + 3 \cdot 3^2} \\
\rhd_c\ 29
\end{array}$$

(ii) ache a forma normal ("valor final") da expressão seguinte, fazendo **exatamente** 4 passos:
$(\lambda x\,.\,\lambda y\,.\,y)\,((\lambda x\,.\,x\ x)\ \ (\lambda x\,.\,x\ x)\ b)$

$$\begin{array}{l}
(\lambda x\,.\,\lambda y\,.\,y)\,\big(\underline{(\lambda x\,.\,x\ x)\ \ (\lambda x\,.\,x\ x)}\ b\big) \\
\rhd_\beta\ (\lambda x\,.\,\lambda y\,.\,y)\,\big(\underline{(\lambda x\,.\,x\ x)\ \ (\lambda x\,.\,x\ x)\ b}\big) \\
\rhd_\beta\ (\lambda x\,.\,\lambda y\,.\,y)\,\big(\underline{(\lambda x\,.\,x\ x)\ \ (\lambda x\,.\,x\ x)\ b}\big) \\
\rhd_\beta\ \underline{(\lambda x\,.\,\lambda y\,.\,y)\,((\lambda x\,.\,x\ x)\ \ (\lambda x\,.\,x\ x)\ b)} \\
\rhd_\beta\ \lambda y\,.\,y
\end{array}$$

(iii) faça exatamente 4 passos (sendo dois deles β e dois deles η) começando com a expressão seguinte, sem achar um valor final:
$(\lambda x\,.\,x\ x\ x)\ \ (\lambda x\,.\,x\ \ (\lambda u\,.\,x\ u)\ \ x)$

$$\begin{array}{l}
\underline{(\lambda x\,.\,x\ x\ x)\ \ (\lambda x\,.\,x\ \ (\lambda u\,.\,x\ u)\ \ x)} \\
\rhd_\beta\ \big(\lambda x\,.\,x\ \underline{(\lambda u\,.\,x\ u)}\ x\big)\,(\lambda x\,.\,x\ \ (\lambda u\,.\,x\ u)\ \ x)\,(\lambda x\,.\,x\ \ (\lambda u\,.\,x\ u)\ \ x) \\
\rhd_\eta\ (\lambda x\,.\,x\ x\ x)\,\big(\lambda x\,.\,x\ \underline{(\lambda u\,.\,x\ u)}\ x\big)\,(\lambda x\,.\,x\ \ (\lambda u\,.\,x\ u)\ \ x) \\
\rhd_\eta\ \underline{(\lambda x\,.\,x\ x\ x)\,(\lambda x\,.\,x\ x\ x)}\,(\lambda x\,.\,x\ \ (\lambda u\,.\,x\ u)\ \ x) \\
\rhd_\beta\ (\lambda x\,.\,x\ x\ x)\,(\lambda x\,.\,x\ x\ x)\,(\lambda x\,.\,x\ x\ x)\,(\lambda x\,.\,x\ \ (\lambda u\,.\,x\ u)\ \ x)
\end{array}$$

Só isso mesmo.