**FMC2, 2022.1**
(Turma N34 do Thanos)

**Prova 1.1**
(points: 24; bonus: $0^\flat$; time: 90')

---

**Nome:** Θάνος **Gabarito**

---

*2022-05-18*

## Regras:

**I.** Não vires esta página antes do começo da prova.

**II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.

**III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

**IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

**V.** $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

**VI.** Use caneta para tuas respostas.

**VII.** Responda dentro das caixas indicadas.

**VIII.** Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

**IX.** Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

**X.** Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

**XI.** Os pontos bônus podem ser usados para aumentar uma nota de qualquer unidade, dado que a nota original é pelo menos 5,0.[3]



## Esclarecimentos:

Suas demonstrações/refutações precisam ser na linguagem "low-level" que temos elaborado nas aulas. (Escreva apenas a parte de "código". *Não inclua* os Dados/Alvo no teu texto!)

*Boas provas!*

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(8) **A**

Estamos no mundo dos conjuntos $(\mathcal{U}; \in)$.

(4) **A1.** Defina (com definição completa, em português matemático) a relação $\subseteq$ de *subconjunto*, e a operação $\bigcup$ de «união grande» ou «união unária».

(2) Definição (subconjunto).

Sejam $A, B$ conjuntos. Dizemos que $A$ é um subconjunto de $B$ (denotado por $A \subseteq B$) sse para todo $a \in A$, $a \in B$.

(2) Definição (união grande).

Seja $\mathscr{A}$ família de conjuntos. Definimos o conjunto $\bigcup \mathscr{A}$ pela

$$x \in \bigcup \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} \text{existe } A \in \mathscr{A} \text{ tal que } x \in A.$$

**A2.** Sejam $A, B, C$ conjuntos e $\mathscr{A}$ família de conjuntos.

(4) Escolha **exatamente uma** das afirmações (a),(b),(c) e decida: (i) demonstrar; (ii) refutar; ou (iii) afirmar que «depende», mostrando uma configuração onde a proposição é válida e uma onde ela não é.

(1) (a) $\emptyset \in A$

(3) (b) $A \cap B \subseteq A \cup C$

(4) (c) $\bigcap \mathscr{A} \subseteq \bigcup \mathscr{A}$

Escolha: ________; Decisão: ________.

(a) Depende.
Tomando $A := \{\emptyset\}$ é válida.
Tomando $A := \{\{\emptyset\}\}$ é inválida.

(b) Vou demonstrar.
Suponha $x \in A \cap B$.
Logo $x \in A \;\&\; x \in B$ $^{(1)}$.
Logo $x \in A$ $^{(2)}$ (extraio-L do (1).
Preciso demonstrar $x \in A \cup C$, ou seja, $x \in A$ ou $x \in B$.
Escolho a parte esquerda para demonstrar.
Imediato pelo (2).

(c) Depende.
Tomando $\mathscr{A} := \emptyset$, temos $\bigcap \mathscr{A} = \mathcal{U}$ e $\bigcup \mathscr{A} = \emptyset$, logo inválida.
Tomando $\mathscr{A} := \{\{1\}, \{1,2\}\}$, temos $\bigcap \mathscr{A} = \{1\}$ e $\bigcup \mathscr{A} = \{1,2\}$, logo válida.

(8) **B**

Escolhe **exatamente um** dos **B1**, **B2**.

(5) **B1.** Demonstre ou refute: para quaisquer conjuntos $A, B, D$, $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B)$.

Resposta: Sim .

Split!

Parte $D \setminus (A \cup B) \subseteq (D \setminus A) \cap (D \setminus B)$.
Seja $x \in D \setminus (A \cup B)$.
Logo $x \in D$ $^{(1)}$ e $x \notin A \cup B$.
Logo não é o caso que ($x \in A$ ou $x \in B$).
Logo $x \notin A$ $^{(2)}$ e $x \notin B$ $^{(3)}$. [Demorgan com $P := x \in A; Q := x \in B$.]
Pelas (1) e (2) temos $x \in D \setminus A$ $^{(4)}$.
Pelas (1) e (3) temos $x \in D \setminus B$ $^{(5)}$.
Pelas (4) e (5) temos $x \in (D \setminus A) \cap (D \setminus B)$.

Parte $D \setminus (A \cup B) \supseteq (D \setminus A) \cap (D \setminus B)$.
Similar.

**Definição.** Seja $\mathscr{A}$ uma família de conjuntos. Chamamos a $\mathscr{A}$ de $\subseteq$-chain sse

$$\text{para todo } A, B \in \mathscr{A}, \text{ temos } A \subseteq B \text{ ou } B \subseteq A.$$

(8) **B2.** Seja $\mathscr{C}$ uma $\subseteq$-chain, e seja $T = \bigcup \mathscr{C}$. A proposição

$$\mathscr{C} \cup \{T\} \text{ é uma chain}$$

é verdadeira? Se sim, demonstre; se não, refute; e se os dados não são suficientes para concluir, mostre um exemplo e um contraexemplo.

Resposta: Sim .

Vou demonstrar que $\mathscr{C} \cup \{T\}$ é uma chain.

Sejam $A, B \in \mathscr{C} \cup \{T\}$. Preciso mostrar que $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Vou separar em casos dependendo de se os $A, B$ pertencem à $\mathscr{C}$ ou ao $\{T\}$.

Caso ambos pertencem à $\mathscr{C}$.
Como $\mathscr{C}$ é chain, temos imediatamente $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Caso exatamente um pertence à $\mathscr{C}$.
Chame $C$ aquele que pertence à $\mathscr{C}$. O outro pertence ao $\{T\}$ e logo é o próprio $T = \bigcup \mathscr{C}$. Vou mostrar que $C \subseteq T$. Seja $c \in C$. Preciso mostrar que $c$ pertence em algum dos membros do $\mathscr{C}$, que acontece pois $C \in \mathscr{C}$.

Caso nenhum pertence à $\mathscr{C}$.
Ou seja, ambos pertencem ao $\{T\}$; ou seja $A = B = T$; e logo $A \subseteq B$.

(8) **C**

Nas aulas conhecemos os tipos de naturais, inteiros, conjuntos, multisets (multiconjuntos), tuplas (ênuplas), e seqüências como *tipos primitivos*.

Agora retiramos os tipos de multiconjuntos e de seqüências e nosso objetivo é *implementar* o tipo de multiconjunto.

Sua especificação exige a interface $\mu : \mathsf{Multiset} \to \mathsf{Obj} \to \mathsf{Nat}$, a idéia sendo que $\mu_M\, x$ denota as vezes que o membro $x$ "pertence" ao multiconjunto $M$.

Dê um exemplo de como seria representado o multiconjunto $\wr 2, 3, 3, 2, 3, 5, 7 \int$ para ilustrar tua idéia e depois explique como implementar mesmo, definindo a operação $\mu$.

(**Obs.:** faz parte da nota do **C** entender o seu objetivo.)

Implementação (Multiset).

Exemplo.
O multiset $\wr 2, 3, 3, 2, 3, 5, 7 \int$ será representado pelo conjunto $\{(2, 2), (3, 3), (5, 1), (7, 1)\}$.

Implementaçaõ (multiconjunto).
Sejam $A, M$ conjuntos.
Chamamos $M$ de *multiconjunto com membros no* $A$ sse:

(i) $M \subseteq A \times \mathbb{N}_{>0}$; e

(ii) para quaisquer $t, t' \in M$, se $\mathit{outl}\, t = \mathit{outl}\, t'$ então $t = t'$.

Implementação (da operação $\mu$).
Seja $A$ conjunto.
Seja $M$ multiconjunto com membros no $A$.
Definimos a operação $\mu$ pela:

$$\mu_M\, x = \begin{cases} \mathit{outr}\, t, & \text{se existe } t \in M \text{ tal que } \mathit{outl}\, t = x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que a condição (ii) deixa a $\mu_M$ bem-definida pois no primeiro caso acima, se existe tal $t$, ele é único.

Só isso mesmo.

**Lemma** (Inter-Empty).
$\bigcap \emptyset = \mathfrak{U}$.

PARTE $\bigcap \emptyset \subseteq \mathfrak{U}$.
Seja $x \in \bigcap \emptyset$.
Logo $x \in \mathfrak{U}$ (pois $\mathfrak{U}$ é universal).

PARTE $\mathfrak{U} \subseteq \bigcap \emptyset$.
Seja $x \in \mathfrak{U}$.
Preciso demonstrar que para todo $A \in \emptyset$, $x \in A$.
Seja $A \in \emptyset$.
Contradição, pois $\emptyset$ é vazio.

**Lemma** (Union-Empty).
$\bigcup \emptyset = \emptyset$.

PARTE $\bigcup \emptyset \subseteq \emptyset$.
Seja $x \in \bigcup \emptyset$.
Logo seja $A$ tal que $x \in A \ \ \& \ \ A \in \emptyset$ (1).
Extraio a parte direita da (1).
Contradição.

PARTE $\emptyset \subseteq \bigcup \emptyset$.
Seja $x \in \emptyset$.
Contradição, pois $\emptyset$ é vazio.

**Teorema** (Demorgan).
$\neg(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \neg P \ \ \& \ \ \neg Q$.

PARTE $\neg(P \text{ ou } Q) \Rightarrow \neg P \ \ \& \ \ \neg Q$.
Suponha $\neg(P \text{ ou } Q)$.

Parte $\neg P$.
Suponha $P$.
Logo $P$ ou $Q$.
Contradição.
Parte $\neg Q$.
Similar.

PARTE $\neg(P \text{ ou } Q) \Leftarrow \neg P \ \ \& \ \ \neg Q$.
Suponha $\neg P \ \ \& \ \ \neg Q$ (1).
Suponha $P$ ou $Q$.
Logo separo em caos:
Caso $P$:
Extraindo a parte esquerda do (1), temos contradição.
Caso $Q$:
Similar.