FMC2, 2021.1

Professor: Thanos

Problem Set 1

(points: 100; deadline: 25/07/2021, 23h59)

Escolhe **até três** dos problemas seguintes para resolver:

Problema 1 (24 pts).
Sejam A conjunto e R uma relação binária sobre A. Demonstre ou refute: *R é uma relação de equivalência sse R é reflexiva e circular.*

Problema 2 (24 pts).
Seja $f : A \to B$. Considere as afirmações seguintes:

(i) existe função bijetiva $h : \mathrm{graph}(f) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A$.

(ii) se f é sobrejetiva, então existe função bijetiva $h : \mathrm{graph}(f) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$.

Para cada uma das (i), (ii), responda. . . (1) "sim", e demonstre; (2) "não", e refute; ou (3) "depende", e mostre dois exemplos: um onde a afirmação é verdadeira, e outro onde não é.

Problema 3 (32 pts).
(i) Demonstre ou refute: para quaisquer conjuntos A, B, existe bijeção entre $(A \to \wp B)$ e $\wp(A \times B)$.
(ii) O que o (i) tem a ver com currificação?

Problema 4 (34 pts).
Na D8.155, usando o *produto* dos A, B, definimos o $\langle f, g\rangle$ e verificamos no x8.51 que tal diagrama comuta.
(i) Defina o conceito correspondente ao *coproduto* e desenha o diagrama comutativo. Em vez de $\langle -, -\rangle$ denotamos por $[-, -]$.
(ii) Para cada uma das afirmações seguintes, demonstre ou refute:

(a) se f sobrejetiva ou g sobrejetiva, então $[f, g]$ sobrejetiva;

(b) se f injetiva ou g injetiva, então $\langle f, g\rangle$ injetiva;

(c) o $\langle -, -\rangle$ respeita a sobrejetividade;

(d) o $[-, -]$ respeita a injetividade.

Problema 5 (34 pts).
Sejam A conjunto e $<$ uma relação binária sobre A. Dizemos que $<$ *não possui cadeias descendentes infinitas* (c.d.i.) sse não existe seqüência $(a_n)_n$ de membros de A tal que:

$$\cdots < a_2 < a_1 < a_0.$$

Dizemos que $<$ é *bem-fundada* se cada conjunto não vazio $X \subseteq A$ possui membro m tal que nenhum $x \in X$ satisfaz $x < m$. (Tal m é chamado *$<$-minimal*.)

Considere a afirmação:

$$< \text{ não possui c.d.i.} \iff < \text{ é bem-fundada}$$

Escolhe uma das direções para demonstrar ou refutar em detalhe. Escreva curtamente um esboço para demonstrar ou refutar a outra direcção.