FMC2, 2020.1
(Turma T34 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28; bonus: $0^\flat$; time: 28')

Nome: Θάνος **Gabarito**

13/03/2020

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

Boas provas!

GABARITO

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em ambos os problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(8) **A**

Escreva uma definição completa e formal (em português matemático) da operação união unária (grande).
DEFINIÇÃO:

Seja $\mathscr{A}$ família de conjuntos. Definimos sua união $\bigcup \mathscr{A}$ pela

$$x \in \bigcup \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ para algum } A \in \mathscr{A}.$$

(16) **B**

Sejam A, B, C conjuntos.
Demonstre que:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \qquad .$$

DEMONSTRAÇÃO.

Mostramos as duas inclusões separadamente:

($\subseteq$): Seja $w \in A \times (B \cup C)$.
Logo sejam $a \in A$ (1) e $d \in B \cup C$ (2) tais que $w = \langle a, d \rangle$ (def. $\times$).
Basta demonstrar que $\langle a, d \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$, ou seja, $\langle a, d \rangle \in A \times B$ ou $\langle a, d \rangle \in A \times C$.
Pelo (2), $d \in B$ ou $d \in C$ (def. $\cup$), e logo separo em casos:
CASO $d \in B$, temos $\langle a, d \rangle \in A \times B$ (def. $\times$) e logo segue o resultado.
CASO $d \in C$, similar.

($\supseteq$): Seja $w \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
Logo $w \in A \times B$ ou $w \in A \times C$ (def. $\cup$).
CASO $w \in A \times B$, sejam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $w = \langle a, b \rangle$ (def.$\times$).
Logo $b \in B \cup C$ (pois $b \in B$) (def. $\cup$).
Logo pela definição de $\times$ temos o desejado $\langle a, b \rangle = w \in A \times (B \cup C)$.
O CASO $w \in A \times C$ é similar.

(28) **C**

Sejam A conjunto e $(B_n)_n$ seqüência de conjuntos. Demonstre que para todo conjunto A e toda seqüência de conjuntos $(B_n)_n$

$$A \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (A \cup B_n) .$$

RESPOSTA.

($\subseteq$): Suponha $x \in A \cup \bigcap_n B_n$, ou seja,

$$x \in A \text{ ou } x \in \bigcap_n B_n. \tag{1}$$

Preciso demonstrar que para todo $m \in \mathbb{N}$, $x \in A \cup B_m$.
Seja $m \in \mathbb{N}$. Vou demonstrar que $x \in A \cup B_m$, ou seja, que $x \in A$ ou $x \in B_m$.
Graças à (1), separo em casos:
CASO $x \in A$. Imediato.
CASO $x \in \bigcap_n B_n$, ou seja,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \in B_n,$$

logo (com $n := m$) $x \in B_m$.

($\supseteq$): Suponha $x \in \bigcap_n (A \cup B_n)$, ou seja,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \in A \cup B_n. \tag{2}$$

Preciso demonstrar que $x \in A \cup \bigcap_n B_n$, ou seja: $x \in A$ ou $x \in \bigcap_n B_n$.
SUPONHA $x \notin A$. Preciso demonstrar que $x \in \bigcap_n B_n$.
Seja $m \in \mathbb{N}$. Basta demonstrar que $x \in B_m$.
Pela (2) (com $n := m$) temos $x \in A \cup B_m$, ou seja, $x \in A$ ou $x \in B_m$.
Mas $x \notin A$ (hipotese), logo $x \in B_m$.

Só isso mesmo.