FMC2, 2020.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28; bonus: $0^\flat$; time: 28')

Nome: Θάνος **Gabarito**

13/03/2020

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em ambos os problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(8) **A**

Escreva uma definição completa e formal (em português matemático) da operação união unária (grande).
DEFINIÇÃO:

Seja $\mathscr{A}$ família de conjuntos. Definimos sua união $\bigcup \mathscr{A}$ pela

$$x \in \bigcup \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ para algum } A \in \mathscr{A}.$$

(16) **B**

Para quaisquer conjuntos A, B, C,

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam A, B, C conjuntos.

($\subseteq$): Seja $x \in C \setminus (A \cap B)$. Vou demonstrar que $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, ou seja, basta demonstrar $x \in C \setminus A$ ou $x \in C \setminus B$. Pela escolha de x temos $x \in C$ (1) e $x \notin A \cap B$ (2) (pela def. de $\setminus$). Pela (2) temos $x \notin A$ ou $x \notin B$. Separamos em casos a partir disso:
CASO $x \notin A$: Pela (1) e a hipotese do caso, temos que $x \in C \setminus A$, que é suficiente.
CASO $x \notin B$: Similar.

($\supseteq$): Seja $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, ou seja,

$$x \in C \setminus A \text{ ou } x \in C \setminus B. \tag{1}$$

Basta demonstrar que $x \in C \setminus (A \cap B)$, ou seja, preciso demonstrar que (i) $x \in C$ e também $x \notin A \cap B$, ou seja, que (ii) $x \notin A$ ou $x \notin B$.

PARTE (i): $x \in C$.
Separo em casos a partir da (1):
CASO $x \in C \setminus A$. Logo $x \in C$ direitamente pela hipotese do caso (def. $\setminus$).
CASO $x \in C \setminus B$: similar.

PARTE (ii): $x \notin A$ OU $x \notin B$.
Novamente separo em casos a partir da (1):
CASO $x \in C \setminus A$. Logo $x \notin A$ pela definição de $\setminus$.
CASO $x \in C \setminus B$: similar.

(28) **C**

Sejam C conjunto e $(A_n)_n$ seqüência de conjuntos. Demonstre:

$$\text{(C1)} \quad C \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} (C \setminus A_n) \qquad \text{(C2)} \quad C \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \supseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (C \setminus A_n).$$

DEMONSTRAÇÃO.

(C1). Seja $x \in \bigcap_n (C \setminus A_n)$, ou seja,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \in C \setminus A_n. \tag{1}$$

Vou demonstrar que $x \in C \setminus \bigcup_n A_n$. Basta então demonstrar $x \in C$ e também $x \notin \bigcup_n A_n$.

PARTE $x \in C$. Considere o natural 0: pela (1) temos que $x \in C \setminus A_0$. Logo $x \in C$ (pela def. de $\setminus$).

PARTE $x \notin \bigcup_n A_n$. Preciso demonstrar que x não pertence a nenhum dos A's. Seja $w \in \mathbb{N}$. Basta mostrar que $x \notin A_w$, algo que segue pela (1) com $n := w$.

(C2). Seja $x \in \bigcup_n (C \setminus A_n)$.
Logo seja $u \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (C \setminus A_u)$.
Logo $x \in C$ (1) e $x \notin A_u$ (2).
Preciso demonstrar que $x \in C \setminus \bigcap_n A_n$, então basta ter:
(i) $x \in C$ (que já temos: (1)); e
(ii) $x \notin \bigcap_n A_n$, ou seja, basta achar um dos A_n's tal que x não pertence a ele. Realmente $x \notin A_u$ (é a (2)), e logo achamos que estavamos procurando.

Só isso mesmo.