FMC2, 2020.1
(Turma T34+N12 do Thanos)

Provinha 0
(points: 0; bonus: $0^\flat$; time: 66'+33')

Alun∗: **Prof∗:**

19/02/2020

Instruções:

Modo aluno: Escreva teu nome no campo "Alun∗" em cima, e use a mesma caneta para responder em todos os problemas da prova.

No tempo determinado entregue tua prova para receber uma de outro aluno da turma.

Modo professor: Usando uma caneta de cor diferente daquela que teu aluno escolheu usar, escreva teu nome no campo "Prof∗" em cima, e corrija sua prova. Não escreva qual seria uma resposta correta, apenas identifique os erros, dando uma curta explicação quando possível.

Lembre-se:

Definição 1.
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. O a *divide* o b (escrevemos $a \mid b$) sse[1] existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $aq = b$.

Definição 2.
Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ sse $m \mid a - b$.

---

[1] escrevemos *sse* como uma abreviação da frase *se e somente se*

A

Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) de "ímpar".
Não suponha que o leitor sabe o que é um número par.

DEFINIÇÃO.

B

B1. Demonstre ou refute a afirmação:

$$\textit{para todo inteiro } a, \quad a \mid a.$$

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

B2. Demonstre ou refute a afirmação:

$$\textit{para quaisquer inteiros } a, b, c, \quad \textit{se } a \mid b \textit{ e } b \mid c\textit{, então } a \mid c.$$

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

B3. Quais (se tem) números são divisíveis por 0?

Quais (se tem) números são divisores de 0?

C

Considere a função recursiva $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida pelas equações:

$$\alpha(0, x) = x + 1 \tag{K1}$$

$$\alpha(n + 1, 0) = \alpha(n, 1) \tag{K2}$$

$$\alpha(n + 1, x + 1) = \alpha(n, \alpha(n + 1, x)) \tag{K3}$$

Demonstre que para todo $x \in \mathbb{N}$, $\alpha(1, x) = x + 2$.
DEMONSTRAÇÃO.

D

Denotamos a operação de concatenação de strings por $+\!\!+$. Dois alunos definiram com as maneiras seguintes a "exponenciação":

$$
\begin{array}{llll}
\text{(L1)} & s^0 = \epsilon & {}^0 s = \epsilon & \text{(R1)} \\
\text{(L2)} & s^n = s^{n-1} +\!\!+\, s & {}^n s = s +\!\!+\, {}^{n-1} s & \text{(R2)}
\end{array}
$$

onde ϵ é o string vazio "", que satisfaz:

$$(\forall s)\,[\,\epsilon +\!\!+\, s = s = s +\!\!+\, \epsilon\,]\,. \tag{E}$$

Demonstre por indução que as duas definições são equivalentes, ou seja, que para todo string s e todo $n \geq 0$, $s^n = {}^n s$. Cuidado: a operação $+\!\!+$ é associativa mas não comutativa.

DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

Rascunho