FMC2, 2020.1
(Turma T34+N12 do Thanos)

Provinha 0
(points: 0; bonus: $0^\flat$; time: 66'+33')

Alun∗: **Prof∗:**

19/02/2020

Instruções:

Modo aluno: Escreva teu nome no campo "Alun∗" em cima, e use a mesma caneta para responder em todos os problemas da prova.

No tempo determinado entregue tua prova para receber uma de outro aluno da turma.

Modo professor: Usando uma caneta de cor diferente daquela que teu aluno escolheu usar, escreva teu nome no campo "Prof∗" em cima, e corrija sua prova. Não escreva qual seria uma resposta correta, apenas identifique os erros, dando uma curta explicação quando possível.

Lembre-se:

Definição 1.
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. O a *divide* o b (escrevemos $a \mid b$) sse[1] existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $aq = b$.

Definição 2.
Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ sse $m \mid a - b$.

---

[1] escrevemos *sse* como uma abreviação da frase *se e somente se*

A

Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) de "ímpar".
Não suponha que o leitor sabe o que é um número par.

DEFINIÇÃO.

Seja n inteiro. Dizemos que n é *ímpar* sse existe inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

B

B1. Demonstre ou refute a afirmação:

$$\textit{para todo inteiro } a, \quad a \mid a.$$

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

Eu vou demonstrar a afirmação.

Seja a inteiro. Como $a \cdot 1 = a$ e 1 é inteiro, logo $a \mid a$.

B2. Demonstre ou refute a afirmação:

$$\textit{para quaisquer inteiros } a, b, c, \quad \textit{se } a \mid b \textit{ e } b \mid c, \textit{ então } a \mid c.$$

DEMONSTRAÇÃO/REFUTAÇÃO.

Eu vou demonstrar a afirmação.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a \mid b$ e $b \mid c$. Logo sejam u, v inteiros tais que $au = b$ e $bv = c$.
Calculamos:

$$\begin{aligned} c &= bv \\ &= (au)v \\ &= a(uv). \end{aligned}$$

Como $uv \in \mathbb{Z}$, logo $a \mid c$.

B3. Quais (se tem) números são divisíveis por 0?

Apenas o 0 é divisível pelo 0, ou seja, para todo inteiro x, $0 \mid x$ sse $x = 0$.
DEMONSTRAÇÃO. Observe que realmente 0 é divisível por 0, pois $0 \cdot 42 = 0$, e 42 é um inteiro. Basta verificar o contrario. Suponha $0 \mid x$ para algum inteiro x. Logo seja $u \in \mathbb{Z}$ tal que $0u = x$. Logo $x = 0$.

Quais (se tem) números são divisores de 0?

Todos os inteiros são divisores de 0.
DEMONSTRAÇÃO. Seja x inteiro. Como $x \cdot 0 = 0$ e $0 \in \mathbb{Z}$, logo $x \mid 0$.

C

Considere a função recursiva $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida pelas equações:

$$\alpha(0, x) = x + 1 \tag{K1}$$
$$\alpha(n + 1, 0) = \alpha(n, 1) \tag{K2}$$
$$\alpha(n + 1, x + 1) = \alpha(n, \alpha(n + 1, x)) \tag{K3}$$

Demonstre que para todo $x \in \mathbb{N}$, $\alpha(1, x) = x + 2$.
DEMONSTRAÇÃO.

Por indução no x.

BASE: $\alpha(1, 0) = 0 + 2$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\alpha(1, 0) &= \alpha(0, 1) && \text{(K2)} \\
&= 1 + 1 && \text{(K1)} \\
&= 2 \\
&= 0 + 2.
\end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO.
Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(1, k) = k + 2$ (H.I.).
Vou demonstrar que $\alpha(1, k + 1) = (k + 1) + 2$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\alpha(1, k + 1) &= \alpha(0, \alpha(1, k)) && \text{(K3)} \\
&= \alpha(1, k) + 1 && \text{(pela (K1), com } x := \alpha(1, k)) \\
&= (k + 2) + 1 && \text{(pela (H.I.))} \\
&= (k + 1) + 2.
\end{aligned}$$

D

Denotamos a operação de concatenação de strings por $+\!\!+$. Dois alunos definiram com as maneiras seguintes a "exponenciação":

$$
\begin{array}{llll}
\text{(L1)} & s^0 = \epsilon & {}^0s = \epsilon & \text{(R1)} \\
\text{(L2)} & s^n = s^{n-1} +\!\!+\, s & {}^ns = s +\!\!+\, {}^{n-1}s & \text{(R2)}
\end{array}
$$

onde ϵ é o string vazio "", que satisfaz:

$$(\forall s)\,[\,\epsilon +\!\!+\, s = s = s +\!\!+\, \epsilon\,]. \tag{E}$$

Demonstre por indução que as duas definições são equivalentes, ou seja, que para todo string s e todo $n \geq 0$, $s^n = {}^ns$. Cuidado: a operação $+\!\!+$ é associativa mas não comutativa.

Demonstração.

Seja s string.
Vamos demonstrar por indução que *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $s^n = {}^ns$. Vamos primeiramente verificar que para $n = 0$ e $n = 1$, realmente temos $s^n = {}^ns$.

Base ($n := 0$). Calculamos: $s^0 \overset{\text{(L1)}}{=} \epsilon \overset{\text{(R1)}}{=} {}^0s$.
Base ($n := 1$). Calculamos:

$$
\begin{array}{llll}
s^1 = s^0 +\!\!+\, s & (\text{def. } s^1) & {}^1s = s +\!\!+\, {}^0s & (\text{def. } {}^1s) \\
\quad = \epsilon +\!\!+\, s & (\text{def. } s^0) & \quad = s +\!\!+\, \epsilon & (\text{def. } {}^0s) \\
\quad = s. & \text{(E)} & \quad = s. & \text{(E)}
\end{array}
$$

Logo $s^1 = {}^1s$.
Passo indutivo.
Seja $k \geq 2$ tal que $s^{k-1} = {}^{k-1}s$ (HI1) e $s^{k-2} = {}^{k-2}s$ (HI2). Vou demonstrar que $s^k = {}^ks$.
Calculamos:

$$
\begin{aligned}
s^k &= s^{k-1} +\!\!+\, s && \text{(L1)} \\
&= {}^{k-1}s +\!\!+\, s && \text{(HI1)} \\
&= (s +\!\!+\, {}^{k-2}s) +\!\!+\, s && \text{(R2)} \\
&= (s +\!\!+\, s^{k-2}) +\!\!+\, s && \text{(HI2)} \\
&= s +\!\!+\, (s^{k-2} +\!\!+\, s) && \text{(Assoc.)} \\
&= s +\!\!+\, s^{k-1} && \text{(L2)} \\
&= s +\!\!+\, {}^{k-1}s && \text{(HI1)} \\
&= {}^ks. && \text{(R2)}
\end{aligned}
$$

Só isso mesmo.