FMC2, 2019.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 64')

Nome:

21/06/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{H}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}$.**[4]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em mais que isso não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b \, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i \, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Definições:

$$\wp A \stackrel{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$
$$\wp_f A \stackrel{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$
$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$
$$\overline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$
$$(A \to B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$$
$$\downarrow\! a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$$
$$\uparrow\! a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$$

$$A =_{\text{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A, B \text{ são equinúmeros}$$
$$A \leq_{\text{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C \, (C \subseteq B \ \land \ A =_{\text{c}} C)$$
$$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$
$$D \text{ downset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D) \, (\forall x \in P) \, [\, x \leq d \implies x \in D \,]$$
$$U \text{ upset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U) \, (\forall x \in P) \, [\, u \leq x \implies x \in U \,]$$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N} \, ; \, \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$\mathsf{0} \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessores diferentes:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: *para todo* $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n \, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Boas provas!

(10) **H**

Definição. Seja $\langle P\,;\leq\rangle$ um poset e $K \subseteq P$. Chamamos o K de *convexo em P* sse para todo $a, b \in K$, todos os membros de P entre a e b também pertencem ao K. (Omitimos o "em P" se é óbvio pelo contexto.) Em símbolos:

$$K \text{ convexo} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall a, b \in K)\,(\forall x \in P)\,[\, a \leq x \leq b \implies x \in K\,]\,.$$

Usamos a notação $\mathcal{K}(P) \overset{\text{def}}{=} \{\, K \subseteq P \;\mid\; K \text{ convexo}\,\}\,.$

Desenhe o Hasse de $\mathcal{K}(\mathbf{3})$ (indicando qual conjunto corresponde em cada pontinho).
Obs: $\mathbf{n}$ é o n-esimo ordinal de von Neumann (ordenado pela $\in$).
Diagrama Hasse.

(25) **R**

(15) Responda com 'T' ou 'F' quando possível:

(i) o conjunto dos números transcendentais é contável: __________ .
(ii) o $\omega \cdot \mathbf{2} + \mathbf{2}$ é embutível nos racionais: __________ .
(iii) o conjunto $(\mathbb{N} \to \{0, 1\})$ é contável: __________ .
(iv) o segmento $[0, 1]$ é equinúmero com o cubo $[0, 1]^3$: __________ .
(v) nas (i)–(v) tem mais afirmações falsas do que verdadeiras: __________ .

(10) . . . e justifique curtamente **exatamente uma** das tuas respostas:
Esbóço de justificativa para minha resposta na afirmação ________ .

(36) **Z**

Considere o axioma seguinte:

$$\forall h \forall t \exists s \forall x \big(x \in s \leftrightarrow x = h \lor x \in t\big). \tag{ZF3*}$$

(12) **Z1.** No sistema ZF1+ZF2+ZF3*, demonstre o ZF3 como teorema.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **Z2.** Mostre que no sistema ZF1+ZF2+ZF3 o ZF3* não é demonstrável.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **Z3.** Demonstre o FZ3* como teorema no sistema ZF1+ZF2+ZF3+ZF4+ZF5+ZF6
DEMONSTRAÇÃO.

(64) # K

Definição 1. Um poset P é chamado *chain-completo* sse todo chain $C \subseteq P$ possui lub.
Definição 2. Um mapa $f : P \to Q$ é chamado *contavelmente continuo* sse f respeita os lubs de todas as *cadeias não vazias e contáveis:* $f(\bigvee C) = \bigvee f[C]$.

O objetivo desse problema é demonstrar (com minha ajuda) o seguinte:

Teorema (Kleene fixpoint). Sejam P poset chain-completo e $\pi : P \to P$ endomapa monótono e contavelmente continuo. Logo π possui exatamente um *strongly least fixpoint* x^*:

$$\pi(x^*) = x^* \tag{i}$$

$$(\forall y \in P)\,[\,\pi(y) \leq y \implies x^* \leq y\,] \tag{ii}$$

(8) **K1.** Demonstre que todo poset chain-completo possui bottom.
DEMONSTRAÇÃO.

(2) **K2.** Defina formalmente a *órbita* do $\perp$, ou seja, a seqüência

$$\perp, \pi(\perp), \pi(\pi(\perp)), \dots$$

DEFINIÇÃO.

(16) **K3.** Demonstre que existe o lub dos elementos da órbita do $\perp$ e seja x^* esse lub.
Dica: *Demonstre por indução que* $\perp \leq \pi(\perp) \leq \pi(\pi(\perp)) \leq \cdots$.
DEMONSTRAÇÃO.

(12) **K4.** Demonstre que x^* é um fixpoint da π.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **K5.** Demonstre que x^* é *o strongly least fixpoint* da π, ou seja, que ele é menor de qualquer *prefixpoint* da π:

$$(\forall y \in P)\,[\,\pi(y) \leq y \implies x^* \leq y\,]\,.$$

Dica: *Indução vai ajudar num momento.*

DEMONSTRAÇÃO.

(8) **K6.** Demonstre a unicidade do x^*, ou seja, que ele é caracterizado pelas (i) e (ii).
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.

Rascunho

RASCUNHO