
Nome:

21/06/2019

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!
- XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.³
- XII. Responda em até 1 dos H, R, Z.⁴

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas com respostas em mais que isso não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \quad (\text{ZF1})$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \quad (\text{ZF2})$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \quad (\text{ZF3})$$

Separation (schema).

Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \quad (\text{ZF4})$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \quad (\text{ZF5})$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \wedge d \in a)) \quad (\text{ZF6})$$

Infinity.

$$\exists i (\emptyset \in i \wedge \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \quad (\text{ZF7})$$

Definições:

$$\wp A \stackrel{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A \quad A =_c B \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Os } A, B \text{ são equinúmeros}$$

$$\wp_{\text{f}} A \stackrel{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\} \quad A \leq_c B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C (C \subseteq B \wedge A =_c C)$$

$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \quad f : A \rightarrowtail B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$

$$\bar{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \quad f : A \twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$

$$(A \rightarrow B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \rightarrow B\} \quad f : A \rightarrowtail B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$

$$\downarrow a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\} \quad D \text{ downset} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D) (\forall x \in P) [x \leq d \implies x \in D]$$

$$\uparrow a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\} \quad U \text{ upset} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U) (\forall x \in P) [u \leq x \implies x \in U]$$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N} ; 0, S \rangle$ que satisfaz as leis:

- | | |
|---|---|
| (P1) Zero é um número natural: | $0 \in \mathbb{N}$ |
| (P2) O sucessor é uma operação unária nos naturais: | $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ |
| (P3) Naturais diferentes tem sucessores diferentes: | $S : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$ |
| (P4) Zero não é o sucessor de nenhum natural: | $0 \notin S[\mathbb{N}]$ |
| (P5) Os naturais satisfazem o princípio da indução: | |

Princípio da indução: para todo $X \subseteq \mathbb{N}$,

$$(0 \in X \wedge \forall n (n \in X \rightarrow S n \in X)) \rightarrow X = \mathbb{N}.$$

Boas provas!

(10) **H**

Definição. Seja $\langle P ; \leq \rangle$ um poset e $A \subseteq P$. Chamamos o A de **antecedente** em P sse para todo $x \in A$, $\{y \in P \mid y \leq x\}$ é **antecedente**. (Omitimos o “em P ” se é óbvio pelo contexto.) Em símbolos:

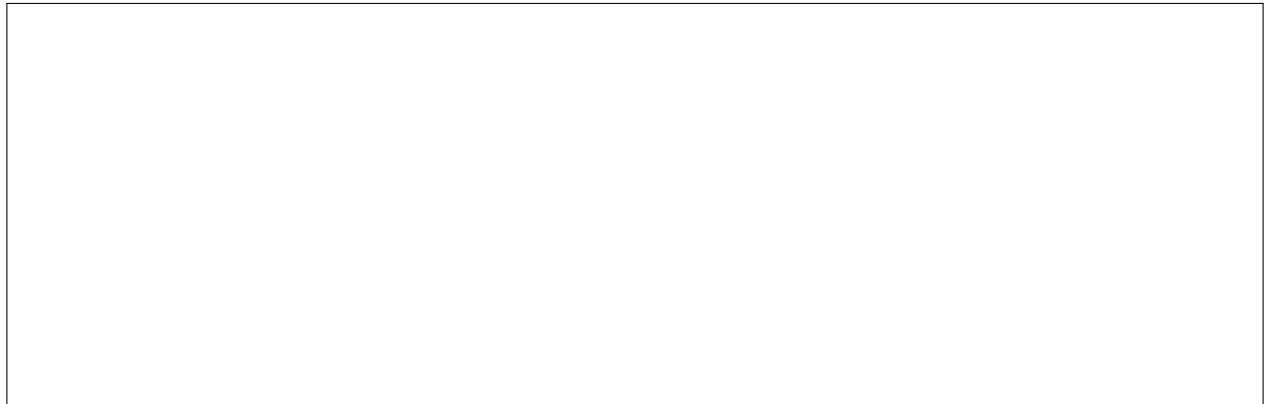
$$A \text{ antecedente} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in A, \{y \in P \mid y \leq x\} \text{ antecedente}.$$

Usamos a notação $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq \alpha\}$.

Desenhe o Hasse de ω (indicando qual α corresponde em cada pontinho).

Obs: ω ordinal de von Neumann (ordenado pela $\in$).

DIAGRAMA HASSE.



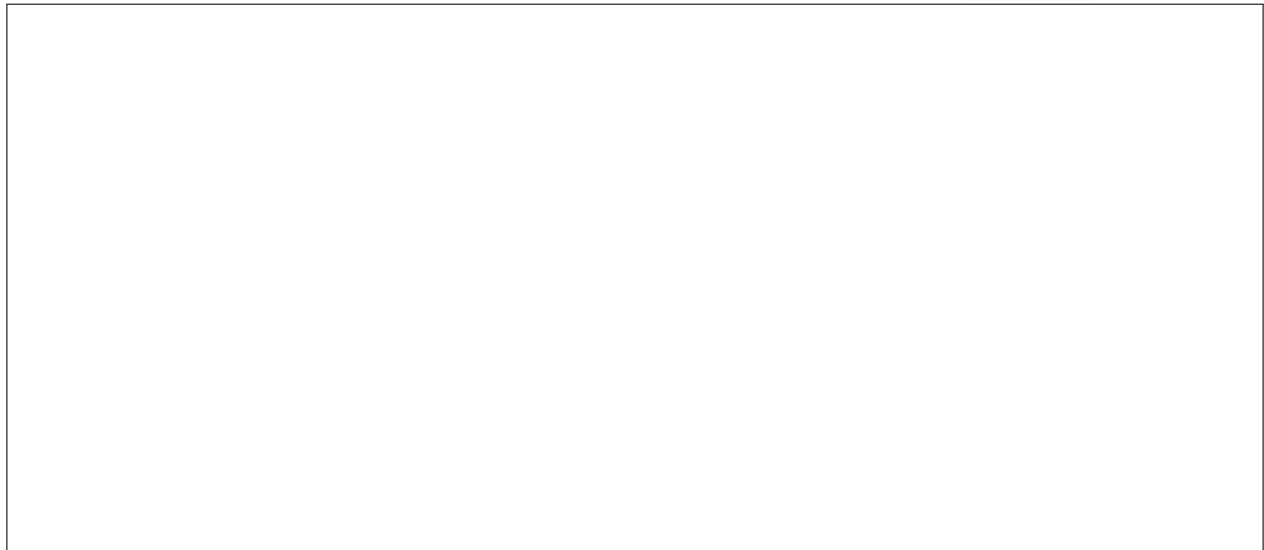
(25) **R**

(15) Responda com ‘T’ ou ‘F’ quando possível:

- (i) o conjunto ω é contável: _____.
- (ii) o ω é embutível no ω : _____.
- (iii) o conjunto ω é contável: _____.
- (iv) o ω é equinúmero com ω : _____.
- (v) ω : _____.

(10) ...e justifique curtamente **exatamente uma** das tuas respostas:

ESBÓÇO DE JUSTIFICATIVA PARA MINHA RESPOSTA NA AFIRMAÇÃO _____.



(36) **Z**

Considere o axioma seguinte:

[REDACTED] (**[REDACTED]**)

(12) **Z1.** **[REDACTED]**, demonstre **[REDACTED]**.

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **Z2.** **[REDACTED]** não é demonstrável.

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **Z3.** Demonstre **[REDACTED]** **[REDACTED]** **[REDACTED]**

DEMONSTRAÇÃO.

(64) **K**

Definição 1. Um poset P é chamado **modular** sse $\forall x, y, z \in P, x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Definição 2. Um mapa $f : P \rightarrow Q$ é chamado **modular** sse f **modular** e **modular**.

O objetivo desse problema é demonstrar (com minha ajuda) o seguinte:

Teorema (**Modular Lattice**). Sejam L poset **modular** e $f : L \rightarrow L$ **modular** e **modular**. Logo L possui exatamente um **modular**:

$$f(x) = x \quad (i)$$

$$f(x) = 0 \quad (ii)$$

(8) **K1.** Demonstre que todo poset **modular** possui **modular**.
DEMONSTRAÇÃO.

(2) **K2.** Defina formalmente a **modular**, ou seja, a **modular**

$$f(x) = x$$

DEFINIÇÃO.

(16) **K3.** Demonstre que existe **modular** e seja **modular**.
Dica: Demonstre por indução.

DEMONSTRAÇÃO.

(12) **K4.** Demonstre que $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{R}$.
DEMONSTRAÇÃO.

(18) **K5.** Demonstre que $\mathbb{R}$ é o $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$, ou seja, que $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$:
 $\mathbb{R}$.

Dica: Indução vai ajudar num momento.

DEMONSTRAÇÃO.

(8) **K6.** Demonstre a unicidade do $\mathbb{R}$, ou seja, que $\mathbb{R}$ é caracterizado pelas (i) e (ii).
DEMONSTRAÇÃO.

Só isso mesmo.