FMC2, 2019.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 64')

Nome: Θάνος **Gabarito**

21/06/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{H}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}$.**[4]

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais que isso não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \qquad \text{(ZF1)}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \qquad \text{(ZF2)}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \qquad \text{(ZF3)}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \qquad \text{(ZF4)}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \qquad \text{(ZF5)}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \qquad \text{(ZF6)}$$

Infinity.

$$\exists i\, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \qquad \text{(ZF7)}$$

Definições:

$$\wp A \overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$

$$\wp_f A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$

$$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

$$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$

$$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$$

$$\downarrow a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$$

$$\uparrow a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$$

$$A =_c B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\, B \text{ são equinúmeros}$$

$$A \leq_c B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C\, (C \subseteq B \ \land\ A =_c C)$$

$$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$

$$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$

$$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$

$$D \text{ downset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\, (\forall x \in P)\, [\, x \leq d \implies x \in D\,]$$

$$U \text{ upset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\, (\forall x \in P)\, [\, u \leq x \implies x \in U\,]$$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}\,;\, 0, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$0 \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessores diferentes:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$0 \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: *para todo* $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(0 \in X \land \forall n\, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Boas provas!

(10) **H**

Definição. Seja $\langle P\ ;\ \leq\rangle$ um poset e $K \subseteq P$. Chamamos o K de *convexo em P* sse para todo $a, b \in K$, todos os membros de P entre a e b também pertencem ao K. (Omitimos o "em P" se é óbvio pelo contexto.) Em símbolos:

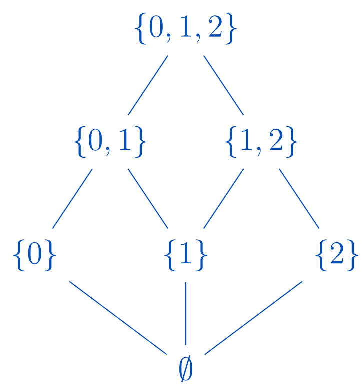
$$K \text{ convexo} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall a, b \in K)\,(\forall x \in P)\,[\, a \leq x \leq b \implies x \in K\,]\,.$$

Usamos a notação $\mathcal{K}(P) \overset{\text{def}}{=} \{\, K \subseteq P \mid K \text{ convexo}\,\}\,.$

Desenhe o Hasse de $\mathcal{K}(\mathbf{3})$ (indicando qual conjunto corresponde em cada pontinho).
Obs: $\mathbf{n}$ é o n-esimo ordinal de von Neumann (ordenado pela $\in$).
Diagrama Hasse.

Primeiramente calculamos:

$$\mathcal{K}(\mathbf{3}) = \{\emptyset, \{0\}\,, \{1\}\,, \{2\}\,,\\ \{0,1\}\,, \{1,2\}\,, \{0,1,2\}\}\,.$$



(25) **R**

(15) Responda com 'T' ou 'F' quando possível:

(i)	o conjunto dos números transcendentais é contável:	F .
(ii)	o $\omega \cdot \mathbf{2} + \mathbf{2}$ é embutível nos racionais:	T .
(iii)	o conjunto $(\mathbb{N} \to \{0,1\})$ é contável:	F .
(iv)	o segmento $[0,1]$ é equinúmero com o cubo $[0,1]^3$:	T .
(v)	nas (i)–(v) tem mais afirmações falsas do que verdadeiras:	_____ .

(10) ...e justifique curtamente **exatamente uma** das tuas respostas:
Esbóço de justificativa para minha resposta na afirmação (todas) .

(i) Os transcendentais não podem ser contáveis pois os reais também seriam como união de dois conjuntos contáveis (o outro sendo os algébricos que é contável). (ii) A idéia é essa:

$$\{0,\ 1/2,\ 3/4,\ 7/8,\ \dots\} \cup \{1,\ 1+1/2,\ 1+3/4,\ 1+7/8,\ \dots\} \cup \{2\} \cup \{3\}\,.$$

(iii) Pelo segundo argumento diagonal de Cantor. (iv) Sabemos que $[0,1] =_c \Delta$ onde $\Delta = (\mathbb{N} \to \{0,1\})$ e logo basta mostrar que $\Delta =_c \Delta^2$ (por que?). Graças ao Bernstein agora segue a equinomerosidade definindo as injecções

$$f(a) = (a, \lambda n\,.\,0) \qquad\qquad g(a,b) = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots).$$

(v) Não podemos responder nem com 'T' (pois assim não teria mais falsas e logo nossa resposta seria errada) e nem com 'F' (pois assim teria mais falsas e logo nossa resposta seria errada novamente).

(36) **Z**

Considere o axioma seguinte:

$$\forall h \forall t \exists s \forall x \big(x \in s \leftrightarrow x = h \lor x \in t \big). \tag{ZF3*}$$

(12) **Z1.** No sistema ZF1+ZF2+ZF3*, demonstre o ZF3 como teorema.
DEMONSTRAÇÃO.

Dados os objetos a, b, queremos construir o $\{a, b\}$. Aplicando o (ZF3*) com $h := b$ e $t := \emptyset$ ganhamos o $\{b\}$, e agora aplicando novamente o mesmo axioma com $h := a$ e $t := \{b\}$ ganhamos o desejado $\{a, b\}$.

(12) **Z2.** Mostre que no sistema ZF1+ZF2+ZF3 o ZF3* não é demonstrável.
DEMONSTRAÇÃO.

Observe que com os axiomas ZF1+ZF2+ZF3* conseguimos construir conjuntos de qualquer cardinalidade finita, mas com os ZF1+ZF2+ZF3 conseguimos construir apenas conjuntos com cardinalidades 0, 1, ou 2.

Basta realmente construir um conjunto com cardinalidade maior que 2 então. Aplique o ZF3* com $h, t := \emptyset$ ganhando assim o $\{\emptyset\}$. Agora com $h := \{\emptyset\}$ e $t := \emptyset$ ganhando o $\{\{\emptyset\}\}$. Com $h := \emptyset$ e $t := \{\{\emptyset\}\}$ ganhamos o $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. E finalmente, com $h, t := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ construimos o $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, que tem cardinalidade 3.

(12) **Z3.** Demonstre o FZ3* como teorema no sistema ZF1+ZF2+ZF3+ZF4+ZF5+ZF6
DEMONSTRAÇÃO.

Sejam h, t conjuntos. Pelo Singleton (Pairset com $a, b := h$) ganhamos o $\{h\}$, e agora usando a união binária (Pairset seguido por Unionset) nos $\{h\}$ e t ganhamos o conjunto desejado.

(64) # K

Definição 1. Um poset P é chamado *chain-completo* sse todo chain $C \subseteq P$ possui lub.
Definição 2. Um mapa $f : P \to Q$ é chamado *contavelmente continuo* sse f respeita os lubs de todas as *cadeias não vazias e contáveis:* $f(\bigvee C) = \bigvee f[C]$.

O objetivo desse problema é demonstrar (com minha ajuda) o seguinte:

Teorema (Kleene fixpoint). Sejam P poset chain-completo e $\pi : P \to P$ endomapa monótono e contavelmente continuo. Logo π possui exatamente um *strongly least fixpoint* x^*:

$$\pi(x^*) = x^* \tag{i}$$
$$(\forall y \in P)\,[\,\pi(y) \leq y \implies x^* \leq y\,] \tag{ii}$$

(8) **K1.** Demonstre que todo poset chain-completo possui bottom.
Demonstração.

O $\emptyset$ é uma chain, e logo o $\bigvee \emptyset$ existe. Mas o $\bigvee \emptyset$ é o bottom pela sua definição como menor de todos os upper bounds. Obs: todo membro de p é trivialmente um upper bound do $\emptyset$.

(2) **K2.** Defina formalmente a *órbita* do $\bot$, ou seja, a seqüência

$$\bot, \pi(\bot), \pi(\pi(\bot)), \dots$$

Definição.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \bot \\ x_{n+1} &= \pi(x_n) \end{aligned}\right\} \quad \text{Obs: essa é a seqüência } (\pi^n(\bot))_n.$$

(16) **K3.** Demonstre que existe o lub dos elementos da órbita do $\bot$ e seja x^* esse lub.
Dica: *Demonstre por indução que* $\bot \leq \pi(\bot) \leq \pi(\pi(\bot)) \leq \cdots$.
Demonstração.

Vou seguir a dica.
Base: $x_0 \leq x_1$.
Imediato pois $x_0 = \bot$ (que é o bottom).
Passo indutivo: $(\forall k \in \mathbb{N})\,[\,x_k \leq x_{k+1} \implies x_{k+1} \leq x_{k+2}\,]$.
Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \leq x_{k+1}$. (H.I.)
Logo $\pi(x_k) \leq \pi(x_{k+1})$ pela monotonia da π.
Logo $x_{k+1} \leq x_{k+2}$, pois $\pi(x_k) = x_{k+1}$ e $\pi(x_{k+1}) = x_{k+2}$.

Logo a imagem da seqüência $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ é uma chain e logo seu lub existe pois P é chain-completo.

(12) **K4.** Demonstre que x^* é um fixpoint da π.
Demonstração.

$$
\begin{aligned}
x^* &= \bigvee \{x_0, x_1, x_2, \dots\} && \text{(def. } x^*\text{)}\\
&= \bigvee \{x_1, x_2, x_3, \dots\} && \text{(por que?)}\\
&= \bigvee \{\pi(x_0), \pi(x_1), \pi(x_2), \dots\} && \text{(def. } x_n\text{)}\\
&= \pi\Big(\bigvee \{x_0, x_1, x_2, \dots\}\Big) && (\pi \text{ contavelmente contínua})\\
&= \pi(x^*)
\end{aligned}
$$

(18) **K5.** Demonstre que x^* é *o strongly least fixpoint* da π, ou seja, que ele é menor de qualquer *prefixpoint* da π:

$$(\forall y \in P)\,[\,\pi(y) \le y \implies x^* \le y\,]\,.$$

Dica: *Indução vai ajudar num momento.*

Demonstração.

Seja $y \in P$ prefixpoint da π, ou seja, tal que $\pi(y) \le y$. Quero $x^* \le y$, mas x^* é o menor dos upper bounds de X, então basta demonstrar que y é *um* upper bound de X.

Vou demonstrar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \le y$.

Base: $x_0 \le y$.
Imediato pois $x_0 = \bot$.
Passo indutivo: $(\forall k \in \mathbb{N})\,[\,x_k \le y \implies x_{k+1} \le y\,]$.
Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \le y$. (H.I.)
Temos

$$
\begin{aligned}
\pi(x_k) &\le \pi(y) && (\pi \text{ monótona})\\
&\le y && \text{(pela escolha do } y\text{)}
\end{aligned}
$$

Acabou, pois $\pi(x_k) = x_{k+1}$ e logo chegamos no desejado $x_{k+1} \le y$.

(8) **K6.** Demonstre a unicidade do x^*, ou seja, que ele é caracterizado pelas (i) e (ii).
Demonstração.

Sejam x^* e x^{**} strongly least fixpoints.
Sendo fixpoints, cada um deles também é um prefixpoint.
Logo $x^* \le x^{**}$ e $x^{**} \le x^*$.
Logo $x^* = x^{**}$.

Só isso mesmo.