FMC2, 2019.1
(Turma T34 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 60')

Nome:

10/05/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Responda em até 2 dos A, B, C.[4]

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em mais que isso não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembram-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\ ;\ *, {}^{-1}, e\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\,a * b \in G\,] \tag{G0}$$
$$(\forall a, b, c \in G)\,[\,a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$
$$(\forall a \in G)\,[\,e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$
$$(\forall a \in G)\,\left[\,a^{-1} * a = e = a * a^{-1}\,\right] \tag{G3}$$

Se $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G)\,[\,a * b = b * a\,] \tag{G4}$$

chamamos o $\mathcal{G}$ *grupo abeliano*.

Definição 2. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad \ldots \text{etc.}$$

Definição 3 (subgrupo). Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Definição 4 (conjugação). Seja G grupo e $a, b \in G$. Chamamos o b conjugado de a sse existe $g \in G$ tal que $a = gbg^{-1}$. Escrevemos $a \approx b$.

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\iff^{\text{def}} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 6 (homomorfismo de grupo). Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A\ ;\ \cdot_A, inv_A, e_A\rangle$ para o grupo $\langle B\ ;\ \cdot_B, inv_B, e_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) para todo $x \in A$, $\varphi(inv_A x) = inv_B(\varphi(x))$;

(iii) $\varphi(e_A) = e_B$.

Definição 7 (kernel). Sejam A e B grupos e φ homomorfismo de A para B. Definimos

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}\,.$$

Boas provas!

(24) **A**

Demonstre pelos (G0)–(G3) o one-test critérion:

Seja G grupo e $\emptyset \neq H \subseteq G$ tal que para todo $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$. Logo $H \leq G$.

Prova.

(32) B

Sejam G grupo e $H, K \leq G$.

$$H \cup K \leq G \iff H \subseteq K \text{ ou } K \subseteq H.$$

Prova.

(42) C

Sejam G, G' grupos e $\varphi : G \to G'$ uma função que respeita a operação. Demonstre que para todo $g \in G$ e todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(g^m) = (\varphi g)^m.$$

Demonstre todos os lemmata/critéria que tu precisarás.
Prova.

(26) **Z**

Demonstre pelos axiomas de monóide o critérion de homomorfismo seguinte:

> *Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ função sobrejetora que respeita a operação. Demonstre que φ é um homomorfismo de monóides.*

Prova.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho