FMC2, 2019.1
(Turma T34 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 60')

Nome: Θάνος **Gabarito**

10/05/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais que isso não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembram-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\ ;\ *, ^{-1}, e\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\,a * b \in G\,] \tag{G0}$$
$$(\forall a, b, c \in G)\,[\,a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$
$$(\forall a \in G)\,[\,e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$
$$(\forall a \in G)\,\left[\,a^{-1} * a = e = a * a^{-1}\,\right] \tag{G3}$$

Se $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G)\,[\,a * b = b * a\,] \tag{G4}$$

chamamos o $\mathcal{G}$ *grupo abeliano*.

Definição 2. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \overset{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad AB \overset{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad \ldots\text{etc.}$$

Definição 3 (subgrupo). Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Definição 4 (conjugação). Seja G grupo e $a, b \in G$. Chamamos o b conjugado de a sse existe $g \in G$ tal que $a = gbg^{-1}$. Escrevemos $a \approx b$.

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\overset{\text{def}}{\iff} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 6 (homomorfismo de grupo). Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A\ ;\ \cdot_A, inv_A, e_A\rangle$ para o grupo $\langle B\ ;\ \cdot_B, inv_B, e_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) para todo $x \in A$, $\varphi(inv_A x) = inv_B(\varphi(x))$;

(iii) $\varphi(e_A) = e_B$.

Definição 7 (kernel). Sejam A e B grupos e φ homomorfismo de A para B. Definimos

$$\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}\,.$$

Boas provas!

(24) **A**

Demonstre pelos (G0)–(G3) o one-test critérion:

Seja G grupo e $\emptyset \neq H \subseteq G$ tal que para todo $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$. Logo $H \leq G$.

Prova.

Vou demonstrar que: (i) $e \in H$; (ii) H é $^{-1}$-fechado; (iii) H é $*$-fechado.

Como $H \neq \emptyset$, tome $h \in H$.

(i) Pela hipótese, $hh^{-1} \in H$, ou seja $e \in H$.

(ii) Como $e, h \in H$, de novo pela hipótese temos $eh^{-1} \in H$, ou seja $h^{-1} \in H$. Temos então que o H é fechado pelos inversos.

(iii) Tomando $a, b \in H$, ganhamos $a, b^{-1} \in H$ (pois já demonstrei que H é fechado pelos inversos no (ii)). Então pela hipótese $a(b^{-1})^{-1} \in H$, ou seja, $ab \in H$.

Usei a lei de "inverso de inverso":

Lemma (inverso de inverso). *Seja G grupo. Para todo $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.*

Demonstração. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
a &= ae && \text{(G2)} \\
&= a\left(a^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1}\right) && \text{(G3)} \\
&= \left(aa^{-1}\right)\left(a^{-1}\right)^{-1} && \text{(G1)} \\
&= e\left(a^{-1}\right)^{-1} && \text{(G3)} \\
&= \left(a^{-1}\right)^{-1}. && \text{(G2)}
\end{aligned}
$$

(32) **B**

Sejam G grupo e $H, K \leq G$.

$$H \cup K \leq G \iff H \subseteq K \text{ ou } K \subseteq H.$$

PROVA.

($\Rightarrow$): Nesse caso $H \cup K = H$ ou $H \cup K = K$ e logo o resultado é imediato pois $H, K \leq G$.

($\Leftarrow$): Vou demonstrar o contrapositivo:

$$H \nsubseteq K \ \& \ K \nsubseteq H \implies H \cup K \nleq G.$$

Suponha então que $H \nsubseteq K$ e $K \nsubseteq H$. Logo sejam $h \in H \setminus K$ e $k \in K \setminus H$. Meu objetivo é demonstrar que $H \cup K \nleq G$.

Vou demonstrar que a (G0) é violada, mostrando que o $hk \notin H \cup K$. Suponha que $hk \in H \cup K$; preciso achar contradição. Caso $hk \in H$: temos $h^{-1}hk \in H$ pois H é fechado pelos inversos e pela operação, e logo $k \in H$, absurdo pela escolha do k. Caso $hk \in K$: similar.

(42) **C**

Sejam G, G' grupos e $\varphi : G \to G'$ uma função que respeita a operação. Demonstre que para todo $g \in G$ e todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(g^m) = (\varphi g)^m.$$

Demonstre todos os lemmata/critéria que tu precisarás.
PROVA.

Seja $g \in G$. Vou demonstrar por indução no n que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(g^n) = (\varphi g)^n$.
BASE. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(g^0) &= \varphi(e_G) && (\text{def. } g^0)\\
&= e_{G'} && (\varphi \text{ homo: (resp. id.)})\\
&= (\varphi g)^0. && (\text{def. } (\varphi g)^0)
\end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(g^k) = (\varphi g)^k$ (H.I.). Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(g^{k+1}) &= (\varphi g)\varphi(g^k) && (\text{def. } g^{k+1})\\
&= (\varphi g)(\varphi g)^k && (\text{H.I.})\\
&= (\varphi g)^{k+1} && (\text{def. } (\varphi g)^{k+1})
\end{aligned}$$

Para ganhar a afirmação sobre o resto dos inteiros (os negativos) seja $n > 0$. Agora:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(g^{-n}\right) &= \varphi\left((g^n)^{-1}\right) && (\text{def. } g^{-n})\\
&= (\varphi(g^n))^{-1} && (\varphi \text{ homo: resp. inv.})\\
&= ((\varphi g)^n)^{-1} && (\text{demonstrado pois } n \in \mathbb{N})\\
&= (\varphi g)^{-n}. && (\text{def. } (\varphi g)^{-n})
\end{aligned}$$

Devo mostrar que φ respeita a identidade, ou seja: $\varphi e = e'$. Temos:

$$\begin{aligned}
& \varphi e = \varphi(ee) = (\varphi e)(\varphi e). && ((\text{G2}) \text{ e } \varphi \text{ resp. op})\\
\text{Logo} \quad & (\varphi e)^{-1}(\varphi e) = (\varphi e)^{-1}(\varphi e)(\varphi e). && (\text{operando por } (\varphi e)^{-1} \text{ pela esquerda.})\\
\text{Logo} \quad & e' = e'(\varphi e) = \varphi e. && (\text{G3 e G2})
\end{aligned}$$

Devo também mostrar que φ respeita os inversos. Seja $x \in G$. Calculo

$$\begin{aligned}
\varphi(x^{-1}) &= \varphi(x^{-1})e' && (\text{G2})\\
&= \varphi(x^{-1})(\varphi x)(\varphi x)^{-1} && (\text{G3})\\
&= \varphi(x^{-1}x)(\varphi x)^{-1} && (\varphi \text{ resp. op.})\\
&= (\varphi e)(\varphi x)^{-1} && (\text{G3})\\
&= e'(\varphi x)^{-1} && (\varphi \text{ resp. id.})\\
&= (\varphi x)^{-1}. && (\text{G2})
\end{aligned}$$

(26) **Z**

Demonstre pelos axiomas de monóide o critérion de homomorfismo seguinte:

> *Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ monóides e $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ função sobrejetora que respeita a operação. Demonstre que φ é um homomorfismo de monóides.*

PROVA.

Como φ é sobrejetora, temos que existe $u \in M$ tal que $\varphi(u) = 1_M$.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(u1_N) &= \varphi(u)\varphi(1_N) && \text{(pela hip.)} \\
&= 1_M\varphi(1_N) && \text{(pela escolha do } u\text{)} \\
&= \varphi(1_N) && \text{(pela (M2))}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\varphi(u1_N) &= \varphi(u) && \text{(pela (M2))} \\
&= 1_M. && \text{(pela escolha do } u\text{)}
\end{aligned}$$

Ou seja, $\varphi(1_N) = 1_M$ que é o que queremos provar.

Só isso mesmo.