FMC2, 2019.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 60')

Nome:

10/05/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em mais que isso não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembram-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\ ;\ *, {}^{-1}, e\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b \in G\,] \tag{G0}$$
$$(\forall a, b, c \in G)\,[\, a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$
$$(\forall a \in G)\,[\, e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$
$$(\forall a \in G)\,\left[\, a^{-1} * a = e = a * a^{-1}\,\right] \tag{G3}$$

Se $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b = b * a\,] \tag{G4}$$

chamamos o $\mathcal{G}$ *grupo abeliano*.

Definição 2. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \overset{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad\qquad AB \overset{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad\qquad \ldots\text{etc.}$$

Definição 3 (subgrupo). Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Definição 4 (conjugação). Seja G grupo e $a, b \in G$. Chamamos o b conjugado de a sse existe $g \in G$ tal que $a = gbg^{-1}$. Escrevemos $a \approx b$.

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\overset{\text{def}}{\iff} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 6 (homomorfismo de grupo). Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A\ ;\ \cdot_A, inv_A, e_A\rangle$ para o grupo $\langle B\ ;\ \cdot_B, inv_B, e_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) para todo $x \in A$, $\varphi(inv_A x) = inv_B(\varphi(x))$;

(iii) $\varphi(e_A) = e_B$.

Definição 7 (kernel). Sejam A e B grupos e φ homomorfismo de A para B. Definimos

$$\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}\,.$$

Boas provas!

(24) **A**

Demonstre pelos (G0)–(G3) a unicidade de inversos:

> *Seja G grupo. Para todo $a \in G$, a^{-1} é seu único inverso.*

Prova.

(32) **B**

Definição. Um homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é *isomorfismo* sse φ é *invertível*, ou seja:

$$\text{existe } \textit{homomorfismo } \varphi' : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \text{ tal que } \quad \varphi'\varphi = \mathsf{id}_A \ \& \ \varphi\varphi' = \mathsf{id}_B.$$

Sejam G, G' grupos e $\varphi : G \to G'$ homomorfismo. Demonstre que:

$$\varphi \text{ iso} \iff \varphi \text{ bijetora}$$

Prova.

(42) **C**

Seja G grupo e $(H_i)_{i \in \mathcal{I}}$ família indexada ($\mathcal{I} \neq \emptyset$) de subgrupos de G, tal que ela é $\subseteq$-*directed*, ou seja:

$$\text{para todo } u, v \in \mathcal{I}, \text{ existe } w \in \mathcal{I} \text{ tal que } H_u \subseteq H_w \text{ e } H_v \subseteq H_w. \tag{D}$$

Demonstre que

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} H_i \leq G.$$

Se usar algum critérion para demonstrar isso, precisas demonstrar o critérion também.
Prova.

(26) **Z**

Demonstre pelos axiomas de anel que se R é um anel e $0 = 1$, então R é um singleton.
Prova.

Só isso mesmo.

RASCUNHO

Rascunho