FMC2, 2019.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 60')

Nome: Θάνος **Gabarito**

10/05/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais que isso não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembram-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\ ;\ *, ^{-1}, e\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b \in G\,] \tag{G0}$$

$$(\forall a, b, c \in G)\,[\, a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$

$$(\forall a \in G)\,[\, e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$

$$(\forall a \in G)\,\left[\, a^{-1} * a = e = a * a^{-1}\,\right] \tag{G3}$$

Se $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b = b * a\,] \tag{G4}$$

chamamos o $\mathcal{G}$ *grupo abeliano*.

Definição 2. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \overset{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad AB \overset{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad \ldots\text{etc.}$$

Definição 3 (subgrupo). Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Definição 4 (conjugação). Seja G grupo e $a, b \in G$. Chamamos o b conjugado de a sse existe $g \in G$ tal que $a = gbg^{-1}$. Escrevemos $a \approx b$.

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\overset{\text{def}}{\iff} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 6 (homomorfismo de grupo). Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A\ ;\ \cdot_A, inv_A, e_A\rangle$ para o grupo $\langle B\ ;\ \cdot_B, inv_B, e_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) para todo $x \in A$, $\varphi(inv_A x) = inv_B(\varphi(x))$;

(iii) $\varphi(e_A) = e_B$.

Definição 7 (kernel). Sejam A e B grupos e φ homomorfismo de A para B. Definimos

$$\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}\,.$$

Boas provas!

(24) **A**

Demonstre pelos (G0)–(G3) a unicidade de inversos:

> *Seja G grupo. Para todo $a \in G$, a^{-1} é seu único inverso.*

PROVA.

Seja $a \in G$. Sabemos que a^{-1} é *um* inverso de a pela (G3). Então basta demonstrar que quaisquer inversos y, y' de a são iguais. Sejam y, y' inversos de a, e logo $ay = e$ e $ay' = e$. Temos então que

$$ay = ay'.$$

Logo (operando nos dois lados por a^{-1} pela esquerda) temos

$$a^{-1}(ay) = a^{-1}(ay')$$

e pela associatividade (G1) temos

$$(a^{-1}a)y = (a^{-1}a)y'$$

mas o a^{-1} é um inverso de a e logo

$$ey = ey'$$

e agora pela (G2) temos

$$y = y'.$$

(32) # B

Definição. Um homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é *isomorfismo* sse φ é *invertível*, ou seja:

$$\text{existe } \textit{homomorfismo } \varphi' : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \text{ tal que } \quad \varphi'\varphi = \mathsf{id}_A \;\&\; \varphi\varphi' = \mathsf{id}_B.$$

Sejam G, G' grupos e $\varphi : G \to G'$ homomorfismo. Demonstre que:

$$\varphi \text{ iso} \iff \varphi \text{ bijetora}$$

PROVA.

($\Rightarrow$): Suponha φ iso. Logo seja $\varphi' : B \to A$ homomorfismo tal que $\varphi'\varphi = \mathsf{id}_A$ e $\varphi\varphi' = \mathsf{id}_B$. Esquecendo a parte de homomorismo da φ', temos uma função que satisfaz essas duas igualdades, e logo ela é a função inversa da φ, e logo φ é bijetiva.

($\Leftarrow$): Suponha φ bijetiva. Logo existe sua função inversa $\varphi^{-1} : B \to A$ e a única coisa que preciso demonstrar é que ela é um homomorfismo. Sejam $x, y \in B$. Como φ é injetora, para demonstrar que

$$\varphi^{-1}(xy) = (\varphi^{-1}x)(\varphi^{-1}y)$$

basta mostrar que

$$\varphi(\varphi^{-1}(xy)) = \varphi\big((\varphi^{-1}x)(\varphi^{-1}y)\big).$$

Calculamos os dois lados

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi^{-1}(xy)) &= xy && (\text{def. } \varphi^{-1}) \\
\varphi\big((\varphi^{-1}x)(\varphi^{-1}y)\big) &= \big(\varphi(\varphi^{-1}x)\big)\big(\varphi(\varphi^{-1}x)\big) && (\varphi \text{ homo: resp. op.}) \\
&= xy && (\text{def. } \varphi^{-1})
\end{aligned}$$

(42) **C**

Seja G grupo e $(H_i)_{i\in\mathcal{I}}$ família indexada ($\mathcal{I} \neq \emptyset$) de subgrupos de G, tal que ela é $\subseteq$-*directed*, ou seja:

$$\text{para todo } u, v \in \mathcal{I}, \text{ existe } w \in \mathcal{I} \text{ tal que } H_u \subseteq H_w \text{ e } H_v \subseteq H_w. \tag{D}$$

Demonstre que

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} H_i \leq G.$$

Se usar algum critérion para demonstrar isso, precisas demonstrar o critérion também.
PROVA.

Vou demonstrar que:

(i) $e \in \bigcup_j H_j$;

(ii) $\bigcup_j H_j$ é $^{-1}$-fechado;

(iii) $\bigcup_j H_j$ é $*$-fechado.

(i) Seja $i \in \mathcal{I}$.
Logo $H_i \leq G$, e como $e \in H_i$, temos $e \in \bigcup_j H_j$.

(ii) Seja $x \in \bigcup_j H_j$.
Logo seja $i_x \in \mathcal{I}$ tal que $x \in H_{i_x}$.
Como $H_{i_x} \leq G$ e logo $^{-1}$-fechado, temos $x^{-1} \in H_{i_x}$.
Logo $x \in \bigcup_j H_j$.

(iii) Sejam $x, y \in \bigcup_j H_j$.
Logo sejam $i_x, i_y \in \mathcal{I}$ tais que $x \in H_{i_x}$ e $y \in H_{i_y}$.
Pela hipótese (D), seja $w \in \mathcal{I}$ tal que $H_{i_x} \subseteq H_w$ e $H_{i_y} \subseteq H_w$.
Logo $x, y \in H_w$.
Mas $H_w \leq G$, e logo $xy \in H_w$ (pois H_w é $*$-fechado).
Logo $xy \in \bigcup_j H_j$.

(26) **Z**

Demonstre pelos axiomas de anel que se R é um anel e $0 = 1$, então R é um singleton.
PROVA.

Vou demonstrar que $R = \{0\}$. Basta demonstrar que para todo $r \in R$, $r = 0$. Seja $r \in R$ então e calculamos:

$$\begin{aligned} 0 &= r0 && \text{(Lemma 1)} \\ &= r1 && (0 = 1) \\ &= r && \text{(1 é $\cdot$-identidade)} \end{aligned}$$

Basta então demonstrar o

Lemma 1. *Seja R anel. Para todo $r \in R$, $0 = r0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $r \in R$. Vou demonstrar que $r0 = 0$; enxergo a afirmação na forma seguinte: «$r0$ é a $+$-identidade». Observe que sei que a identidade é única, pois $\langle R\,;+,-,0\rangle$ é um grupo. Calculo

$$\begin{aligned} r0 + r0 &= r(0+0) && \text{(RDL)} \\ &= r0 && \text{(RA2)} \end{aligned}$$

Pelas "identidades mais baratas" agora já podemos afirmar que $r0$ é a $+$-identidade.

(Alternativamente podemos adicionar nos dois lados o $-(r0)$, efetivamente copiando a demonstração que já fizemos nos grupos.)

Só isso mesmo.