FMC2, 2019.1
(Turma T34 do Thanos)

Prova 1.3
(points: 36; bonus: $0^\flat$; time: 50')

Nome: Θάνος **Gabarito**

12/04/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Responda em ambos os G, H.

Lembram-se: $[a]_\sim$: a classe de equivalência do a através da $\sim$; $A/{\sim}$: o conjunto quociente do A sobre a $\sim$.

Glossário.

$x \mathrel{R} x$	(reflexiva)
$x \not\mathrel{R} x$	(irreflexiva)
$x \mathrel{R} y \implies y \mathrel{R} x$	(simétrica)
$x \mathrel{R} y \implies y \not\mathrel{R} x$	(assimétrica)
$x \mathrel{R} y \;\&\; y \mathrel{R} z \implies x \mathrel{R} z$	(transitiva)
reflexiva & transitiva	(preordem)
reflexiva & transitiva & simétrica	(relação de equivalência)
reflexiva & transitiva & antissimétrica	(ordem (parcial))

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(18) **G**

(9) **G1.** Seja $R : \mathrm{Rel}\,(A, A)$, simétrica e transitiva. Demonstre que:

$$R \text{ reflexiva} \iff (\forall x \in A)\,(\exists y \in A)\,[\,x\;R\;y\,]\,.$$

Demonstração.

$(\Rightarrow)$. Seja $a \in A$. Procuro membro de A que satisfaz a $a\;R\;-$.
O próprio a serve, pois $a\;R\;a$ pela reflexividade da R (hipótese).
$(\Leftarrow)$. Seja $a \in A$.
Pela hipótese, seja $a' \in A$ tal que $a\;R\;a'$ $^{(1)}$.
Logo $a'\;R\;a$ $^{(2)}$ pela simetria da R, e logo $a\;R\;a$ pelas (1) e (2) (transitividade da R).
Logo R é reflexiva.

(9) **G2.** Seja $\sim$ uma relação de equivalência num conjunto X, e sejam $a, b \in X$. Os seguintes são equivalentes:

$$\text{(i) } a \sim b; \qquad \text{(ii) } [a] \subseteq [b]; \qquad \text{(iii) } [a] \cap [b] \neq \emptyset.$$

Demonstração.

Vamos demonstrar primeiro a (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

$(\Rightarrow)$. Suponha que $a \sim b$. Tome $x \in [a]$. Logo $x \sim a$. Mas $a \sim b$ e logo pela transitividade da $\sim$ temos $x \sim b$, e logo $x \in [b]$.

$(\Leftarrow)$. Suponha que $[a] \subseteq [b]$. Pela reflexividade da $\sim$, sabemos que $a \in [a]$. Logo $a \in [b]$, e logo $a \sim b$ pela definição de $[b]$.

Agora vamos provar a (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

$(\Rightarrow)$. Suponha que $a \sim b$. Precisamos achar um elemento que pertence nos dois conjuntos $[a]$ e $[b]$. Tome o próprio a. Temos $a \in [a]$ pois $a \sim a$ (pela reflexividade da $\sim$). Também temos $a \in [b]$, pois $a \sim b$ (hipótese). Logo $a \in [a] \cap [b] \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$. Suponha que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ e tome $w \in [a] \cap [b]$. Logo $w \in [a]$ e $w \in [b]$, ou seja $w \sim a$ e $w \sim b$ pela definição de classe de equivalência. Pela simetría da $\sim$ temos $a \sim w$. Agora como $a \sim w$ e $w \sim b$, pela transitividade da $\sim$ ganhamos o desejado $a \sim b$.

(18) **H**

Seja $R : \mathrm{Rel}\,(X, X)$. Demonstre que para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$R^{n+m} = R^n \diamond R^m.$$

Enuncie e demonstre como lemas todas as propriedades que tu precisarás sobre a $\diamond$.
Demonstração.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Por indução no m.
Base. Calculo:

$$R^{n+0} = R^n = R^n \diamond (=_X) = R^n \diamond R^0$$

pois a igualdade é uma $\diamond$-identidade (direita).
Passo indutivo. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $R^{n+k} = R^n \diamond R^k$ (HI). Calculamos:

$$\begin{aligned}
R^{n+(k+1)} = R^{(n+k)+1} &= R^{(n+k)}R && (\text{def. } R^{(n+k)+1}) \\
&= (R^n R^k)R && (\text{HI}) \\
&= R^n(R^k R) && (\text{associatividade da } \diamond) \\
&= R^n(RR^k) && (\text{Lemma 1}) \\
&= R^n(R^{k+1}). && (\text{def. } R^{k+1})
\end{aligned}$$

Lémmata.

Associatividade da $\diamond$. *Sejam conjuntos A, B, C, D e relações binárias $R : \mathrm{Rel}\,(A, B)$, $S : \mathrm{Rel}\,(B, C)$, e $T : \mathrm{Rel}\,(C, D)$. Então $(RS)T = R(ST)$.*
Demonstração. Suponha $a \in A$ e $d \in D$ tais que $a\ ((RS)T)\ d$.
Logo seja $c \in C$ tal que $a\ (RS)\ c$ (1) e $c\ T\ d$ (2).
Logo (pelo (1)) seja $b \in B$ tal que $a\ R\ b$ (3) e $b\ S\ c$ (4).
Pelos (4) e (2) temos $b\ (ST)\ d$ (5).
Pelos (3) e (5) temos $a\ (R(ST))\ d$.
A outra direção é similar.

Lemma 1. *Para todo $t \in \mathbb{N}$, $R^t R = RR^t$.*
Demonstração. Por indução.
Base: $R^0 R \stackrel{?}{=} RR^0$. Imediato pois $R^0 = (=_X)$ e $=_X$ é uma $\diamond$-identidade.
Passo indutivo. Seja $w \in \mathbb{N}$ tal que $R^w R = RR^w$ (HI). Calculamos:

$$\begin{aligned}
R^{w+1}R &= (R^w R)R && (\text{def. } R^{w+1}) \\
&= (RR^w)R && (\text{HI}) \\
&= R(R^w R) && (\text{assoc. } \diamond) \\
&= R(RR^w) && (\text{HI}) \\
&= RR^{w+1}. && (\text{def. } R^{w+1})
\end{aligned}$$

Mais lémmata.

Igualdade é uma $\diamond$-identidade. *Para qualquer relação* $R : \mathrm{Rel}\,(X, X)$,

$$R \diamond (=_X) = R = (=_X) \diamond R.$$

Demonstração.

$$a\ R\ b \implies a\ R\ b\ \ \&\ \ b =_X b \implies a\ (R \diamond =_X)\ b$$
$$a\ (R \diamond =_X)\ b \implies (\exists w \in X)\,[\,a\ R\ w\ \ \&\ \ w =_X b\,] \implies a\ R\ b.$$

Similarmente demonstramos que ela é uma identidade esquerda.

Só isso mesmo.

Rascunho