FMC2, 2019.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.3
(points: 36; bonus: $0^\flat$; time: 50')

Nome: Θάνος **Gabarito**

12/04/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Responda em ambos os G, H.

Lembram-se: $[a]_\sim$: a classe de equivalência do a através da $\sim$; $A/{\sim}$: o conjunto quociente do A sobre a $\sim$.

Glossário.

$x \mathrel{R} x$	(reflexiva)
$x \not\mathrel{R} x$	(irreflexiva)
$x \mathrel{R} y \implies y \mathrel{R} x$	(simétrica)
$x \mathrel{R} y \implies y \not\mathrel{R} x$	(assimétrica)
$x \mathrel{R} y \;\&\; y \mathrel{R} z \implies x \mathrel{R} z$	(transitiva)
reflexiva & transitiva	(preordem)
reflexiva & transitiva & simétrica	(relação de equivalência)
reflexiva & transitiva & antissimétrica	(ordem (parcial))

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(18) **G**

Para qualquer $m \in \mathbb{N}$, seja $\equiv_m$ a relação nos inteiros definida pela

$$a \equiv_m b \overset{\text{def}}{\iff} a \equiv b \pmod{m}.$$

Escrevemos $[a]_m$ para denotar a classe de equivalência $[a]_{\equiv_m}$.

(9) **G1.** Demonstre que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\equiv_m$ é uma relação de equivalência.
Como descreverias numa maneira simples as relações $\equiv_0$ e $\equiv_1$? Justifique tua resposta.
DEMONSTRAÇÃO.

Seja $m \in \mathbb{N}$.
REFLEXIVIDADE. Seja $x \in \mathbb{Z}$. Logo $m \mid x - x$, pois $m \mid 0$, e logo $x \equiv_m x$.
TRANSITIVIDADE. Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $x \equiv_m y$ e $y \equiv_m z$.
Ou seja, $m \mid x - y$ e $m \mid y - z$.
Logo m divide a soma $(x - y) + (y - z)$, ou seja, $m \mid x - z$, ou seja $x \equiv_m z$.
SIMETRIA. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $x \equiv_m y$.
Ou seja, $m \mid x - y$ e logo $m \mid -(x - y)$ e logo $m \mid y - x$, e logo $y \equiv_m x$.

DESCRIÇÃO E JUSTIFICAÇÃO.

$\equiv_0$ é a igualdade, e $\equiv_1$ é a relação "cheia" True:

$$x \equiv_0 y \iff 0 \mid x - y \iff x - y = 0 \iff x = y;$$
$$x \equiv_1 y \iff 1 \mid x - y \iff \mathsf{True}.$$

(9) **G2.** Sejam F, G funções definidas(?) pelas:

$$F : \underline{\mathbb{Z}/{\equiv_2}} \to \underline{\mathbb{Z}/{\equiv_4}} \qquad\qquad G : \underline{\mathbb{Z}/{\equiv_4}} \to \underline{\mathbb{Z}/{\equiv_2}}$$
$$F([x]_2) = [x]_4 \qquad\qquad G([x]_4) = [x]_2.$$

(i) Escreva **nas linhas acima** tipos razoáveis e válidos.
(ii) Para cada uma das F, G decida se é bem-definida. Justifique (demonstre) tua resposta.
DEMONSTRAÇÃO: A F <u>NÃO É</u> BEM-DEFINIDA;

Considere os $[0]_2 = [2]_2$.
Observe que $[0]_4 \neq [2]_4$ $(2 \notin [0]_4)$.
Logo a f não é bem-definida, pois a escolha do representante afeta o valor da f.

DEMONSTRAÇÃO: A G <u>É</u> BEM-DEFINIDA;

Tome z, z' inteiros tais que $z \equiv_4 z'$.
Basta demonstrar que $[z]_2 = [z']_2$, ou seja, que $z \equiv_2 z'$.
Pela definição da $\equiv_4$, temos que $4 \mid z - z'$.
Logo $2 \mid z - z'$, e logo $z \equiv_2 z'$.

(18) **H**

Seja $R : \mathrm{Rel}\,(X,X)$. Demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(R^n)^\partial = \left(R^\partial\right)^n.$$

Enuncie e demonstre como lemas todas as propriedades que tu precisarás sobre a $\diamond$ e a $-^\partial$.

DEMONSTRAÇÃO.

Por indução. BASE. Calculo:

$$\left(R^0\right)^\partial = (=_X)^\partial \stackrel{(1)}{=} (=_X) = \left(R^\partial\right)^0$$

pelo Lemma 1 na $\stackrel{(1)}{=}$, e pela definição de $-^0$ nas outras.

PASSO INDUTIVO. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left(R^k\right)^\partial = \left(R^\partial\right)^k$ (HI). Calculamos:

$$\begin{aligned}
\left(R^{k+1}\right)^\partial &= \left(RR^k\right)^\partial && \text{(def. } R^{k+1}\text{)}\\
&= \left(R^k R\right)^\partial && \text{(Lemma 2)}\\
&= R^\partial \left(R^k\right)^\partial && \text{(Lemma 3)}\\
&= R^\partial \left(R^\partial\right)^k && \text{(HI)}\\
&= \left(R^\partial\right)^{k+1} && \text{(def. } R^{k+1}\text{)}
\end{aligned}$$

LÉMMATA.

Lemma 1. *A oposta duma relação simétrica R é a própria R.*

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned}
xR^\partial y &\iff y\;R\;x && \text{(def. } R^\partial\text{)}\\
&\iff x\;R\;y && \text{(}R\text{ simétrica)}
\end{aligned}$$

Lemma 2. *Para todo $t \in \mathbb{N}$, $R^t R = RR^t$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por indução.

BASE: $R^0 R \stackrel{?}{=} RR^0$. Imediato pois $R^0 = (=_X)$ e $=_X$ é uma $\diamond$-identidade.

PASSO INDUTIVO. Seja $w \in \mathbb{N}$ tal que $R^w R = RR^w$ (HI). Calculamos:

$$\begin{aligned}
R^{w+1}R &= (R^w R)R && \text{(def. } R^{w+1}\text{)}\\
&= (RR^w)R && \text{(HI)}\\
&= R(R^w R) && \text{(assoc. } \diamond\text{)}\\
&= R(RR^w) && \text{(HI)}\\
&= RR^{w+1}. && \text{(def. } R^{w+1}\text{)}
\end{aligned}$$

MAIS LÉMMATA.

Igualdade é uma $\diamond$-identidade. *Para qualquer relação* $R : \mathrm{Rel}(X, X)$,

$$R \diamond (=_X) = R = (=_X) \diamond R.$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$a\;R\;b \implies a\;R\;b \;\;\&\;\; b =_X b \implies a\;(R \diamond =_X)\;b$$
$$a\;(R \diamond =_X)\;b \implies (\exists w \in X)\,[\,a\;R\;w \;\;\&\;\; w =_X b\,] \implies a\;b\,.$$

Similarmente demonstramos que ela é uma identidade esquerda.

Lemma 3. *A oposta da composição é a composição das opostas.*
DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned}
x\,(RS)^{\partial}\,y &\iff y\,(RS)\,x && \text{(def. } (RS)^{\partial}\text{)}\\
&\iff \text{existe } w \text{ tal que } y\;R\;w \text{ e } w\;S\;x && \text{(def. } RS\text{)}\\
&\iff \text{existe } w \text{ tal que } wR^{\partial}y \text{ e } xS^{\partial}w && \text{(def. } R^{\partial} \text{ e } S^{\partial}\text{)}\\
&\iff \text{existe } w \text{ tal que } xS^{\partial}w \text{ e } wR^{\partial}y\\
&\iff x\left(S^{\partial}R^{\partial}\right)y. && \text{(def. } S^{\partial}R^{\partial}\text{)}
\end{aligned}$$

Só isso mesmo.

RASCUNHO