FMC2, 2019.1
(Turma T34 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 36; bonus: $0^\flat$; time: 33')

Nome: Θάνος **Gabarito**

29/03/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$.**[4]

Lembram-se:

$$(A \to B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$$

$$f[X] \stackrel{\text{def}}{=} \text{a } \textit{imagem} \text{ de } X \subseteq \operatorname{dom} f \text{ através da } f$$

$$f^{-1}[Y] \stackrel{\text{def}}{=} \text{a } \textit{preimagem} \text{ de } Y \subseteq \operatorname{cod} f \text{ através da } f$$

$$f^n \stackrel{\text{def}}{=} \text{a } n\text{-ésima iteração da } f$$

$$f : A \rightarrowtail B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$

$$f : A \twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$

$$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em ambos os problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(36) **D**

Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tais que $g \circ f$ é bijetora. Considere a afirmação:

$$f \text{ é sobrejetiva} \overset{?}{\iff} g \text{ é injetiva}$$

Para cada uma das direções responda... (1) "sim", e prove; (2) "não", e refute; ou (3) "depende", e mostre dois exemplos: um onde a implicação é valida, e outro onde não é.

(18) **D1.** Resposta "$\Rightarrow$".

Sim. Suponha f sobrejetiva (e logo bijetora pelo Lemma 1). Sejam $b, b' \in B$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
gb = gb' &\implies (g\mathsf{id}_B)b = (g\mathsf{id}_B)b' && (\text{lei da } \mathsf{id}_B)\\
&\implies (g(ff^{-1}))b = (g(ff^{-1}))b' && (\text{lei da } f^{-1})\\
&\implies (gf)\left(f^{-1}b\right) = (gf)\left(f^{-1}b'\right) && (\text{assoc. da } \circ)\\
&\implies f^{-1}b = f^{-1}b' && ((gf) \text{ injetora})\\
&\implies b = b'. && (f^{-1} \text{ injetora})
\end{aligned}$$

Lemma 1. (gf) injetora $\implies$ f injetora.
Demonstração. Suponha (gf) injetora e sejam $a, a' \in A$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
fa = fa' &\implies g(fa) = g(fa') && (\text{lei da } =)\\
&\implies (gf)a = (gf)a' && (\text{def. } (gf))\\
&\implies a = a'. && ((gf) \text{ injetora})
\end{aligned}$$

(18) **D2.** Resposta "$\Leftarrow$".

Sim. Suponha g injetora (e logo bijetora pelo Lemma 2). Seja $b \in B$. Procuro $a_b \in A$ tal que $f(a_b) = b$ Temos $gb \in C$ e logo pela sobrejetoridade da gf seja $a_b \in A$ tal que $(gf)a_b = gb$. Logo $g(fa_b) = gb$ e como g é injetora temos $fa_b = b$ que é o que precisava demonstrar.

Lemma 2. (gf) sobrejetora $\implies$ g sobrejetora.
Demonstração. Suponha (gf) sobrejetora e seja $c \in C$. Procuro membro do B mapeado ao c pela g. Como gf sobrejetora, logo seja $a_c \in A$ tal que $(gf)a_c = c$. Ou seja, $g(fa_c) = c$, e logo o fa_c serve.

(36) **E**

Defina o que significa que f é constante sem usar o '$\in$', "pertence", e seus sinônimos; mas num estilo point-free. Demonstre que tua definição é correta.

RESPOSTA:

Seja $f : A \to B$. f é constante sse existe singleton S e funções $A \xrightarrow{i} S \xrightarrow{j} B$ tais que $f = ji$.

"$\Rightarrow$". Seja $b \in B$ tal que $f = \lambda x \,.\, b$. Seja S um singleton $\{*\}$ e sejam as funções $A \xrightarrow{j} S \xrightarrow{i} B$ definidas pelas:

$$i(x) = * \qquad\qquad j(*) = b.$$

Seja $a \in A$. Calculamos pelas definições de composição, da i, da j, e da f:

$$(ji)a = j(ia) = j(*) = b = f(a).$$

"$\Leftarrow$". Sejam $A \xrightarrow{i} S \xrightarrow{j} B$ tais que $f = ji$, e seja $*$ o único membro do S. Vou demonstrar que f é constante com valor $j(*)$. Seja $a \in A$. Calculamos:

$$fa = (ji)a = j(ia) = j(*)$$

onde a última igualdade é justificada pois o codomínio da i é um singleton e logo ia só pode ser o próprio $*$.

(36) **F**

Seja função $f : A \to B$.

F1. (i) Demonstre: se f tem um $\circ$-inverso pela esquerda f^{L}, então f é injetora.
(ii) O converso é válido... Sempre? Nunca? Quando? (Justifique tua resposta.)
RESPOSTAS.

(i) Suponha f^{L} um inverso-esquerdo da f. Sejam $a, a' \in A$. Calculamos

$$fa = fa' \implies f^{\mathrm{L}}(fa) = f^{\mathrm{L}}(fa') \implies (f^{\mathrm{L}}f)a = (f^{\mathrm{L}}f)a' \implies \mathsf{id}_A a = \mathsf{id}_A a' \implies a = a'.$$

onde apliquei a f^{L} nos dois lados e depois as def. de $f^{\mathrm{L}}f$, f^{L}, id_A, respectivamente.

(ii) O converso é válido se $A \neq \emptyset$; e se $A = \emptyset$, é valido apenas quando $B = \emptyset$ também.
CASO $A \neq \emptyset$. Seja então $a_0 \in A$. Define a função $f^{\mathrm{L}} : B \to A$

$$f^{\mathrm{L}}(y) = \begin{cases} \text{o único } x \text{ tal que } f(x) = y, & \text{se } y \in \mathrm{range}(f) \\ a_0, & \text{se } y \notin \mathrm{range}(f). \end{cases}$$

onde usamos a injetoridade para grantir que f^{L} foi bem-definida. Verificamos que f^{L} realmente é um inverso-esquerdo da f: Seja $a \in A$. Agora pelas def. de $\circ$ e f^{L} respectivamente:

$$(f^{\mathrm{L}}f)a = f^{\mathrm{L}}(fa) = a.$$

CASO $A = \emptyset$. Se $B = \emptyset$ existe única função $B \to A$ (vazia), e vacuamente é uma L-inversa da f. Se $B \neq \emptyset$ não existe nenhuma função $B \to A$ (por causa da condição de totalidade de funções) e logo é impossível achar uma função inversa-esquerda da f.

F2. Verdade ou falso?:
(18) Se, adicionalmente, o inverso esquerdo f^{L} é injetivo, podemos concluir que f é bijetora. (Demonstre tua afirmação.)
RESPOSTA & DEMONSTRAÇÃO.

Verdade. Suponha f^{L} injetora.
Basta mostrar que f é sobrejetora pois já sabemos que é injetora (pelo (i)).
Seja $b \in B$ então. Procuro membro de A tal que f mapeia para o b. Considere o $f^{\mathrm{L}}b \in A$.
Seja $b' = f(f^{\mathrm{L}}b)$ (f mapeia o $f^{\mathrm{L}}b$ para o b'; logo basta mostrar $b = b'$).
Aplicamos a f^{L} aos dois lados e calculamos:

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{L}}b' &= f^{\mathrm{L}}(f(f^{\mathrm{L}}b)) \\ &= (f^{\mathrm{L}}f)(f^{\mathrm{L}}b)) && \text{(assoc. e def. de } \circ) \\ &= f^{\mathrm{L}}b && \text{(LInv)} \end{aligned}$$

e logo $b' = b$ pois f^{L} é injetora.

Só isso mesmo.