FMC2, 2019.1
(Turma N34 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 36; bonus: $0^\flat$; time: 33')

Nome: Θάνος **Gabarito**

29/03/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{C}$.**[4]

Lembram-se:

$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$

$f[X] \overset{\text{def}}{=}$ a *imagem* de $X \subseteq \text{dom} f$ através da f

$f^{-1}[Y] \overset{\text{def}}{=}$ a *preimagem* de $Y \subseteq \text{cod} f$ através da f

$f^n \overset{\text{def}}{=}$ a n-ésima iteração da f

$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função injetora de A para B

$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função sobrejetora de A para B

$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função bijetora de A para B

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em ambos os problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(36) **D**

Seja $f : A \to A$ endomapa tal que $f^3 = \mathsf{id}_A$.

(18) **D1.** Dê um exemplo disso, com $f \neq \mathsf{id}_A$.
EXEMPLO.

Seja $A = \{0, 1, 2\}$ e f o "sucessor módulo 3":

$$0 \overset{f}{\mapsto} 1 \overset{f}{\mapsto} 2 \overset{f}{\mapsto} 0.$$

(18) **D2.** A afirmação

$$f \text{ é bijetora}$$

é verdadeira? Se sim, demonstre; se não, refute; se os dados não são suficientes para concluir, mostre um exemplo e um contraexemplo.
RESPOSTA.

Sim.

INJETORIDADE. Sejam $a, a' \in A$ tais que $fa = fa'$.
Logo (aplicando a f nos dois lados) $f(fa) = f(fa)$.
Logo (mais uma vez) $f(f(fa)) = f(f(fa))$.
Ou seja, $(fff)a = (fff)a'$ pela associatividade da $\circ$ e sua definição.
Mas $fff = f^3 = \mathsf{id}_A$. Logo $\mathsf{id}_A a = \mathsf{id}_A a'$ e logo $a = a'$.

SOBREJETORIDADE. Seja $y \in A$.
Procuro membro de A que f mapeia para o y.
Afirmo que um tal membro é o $(ff)y$.
Confirmo:

$$\begin{aligned} f\big((ff)y\big) &= (f^3)y && \text{(def. } f^3\text{)} \\ &= \mathsf{id}_A y && \text{(hipótese)} \\ &= y. && \text{(def. } \mathsf{id}_A\text{)} \end{aligned}$$

(36) **E**

Seja $f : A \to B$ tal que $f[A]$ é um singleton (conjunto unitário) ou $f^{-1}[B]$ é um singleton. O que interessante[5] podes conluir sobre a f? (Demonstre tua afirmação.)
RESPOSTA.

Posso concluir que f é constante.

DEMONSTRAÇÃO. Separo em casos.

CASO $f[A]$ É SINGLETON. Logo seja t tal que $f[A] = \{t\}$. Vou demonstrar que f é constante com valor t. Primeiramente vou estabelecer que $A \neq \emptyset$. Como $t \in f[A]$, pela definição de $f[A]$ temos que existe $a \in A$ tal que... nem importa o que, só queria mostrar que $A \neq \emptyset$ neste momento. Logo seja $x \in A$. Vou demonstrar que $f(x) = t$. Basta mostrar que $f(x) \in \{t\}$, que é imediato pois $f(x) \in f[A] = \{t\}$.

CASO $f^{-1}[B]$ É SINGLETON. Observe que $f^{-1}[B]$ é o domínio da f, ou seja, o A, pois f é função (totalidade). Seja s o único membro do A então. Trivialmente f é a constante com valor $f(s) \in B$, pois ela mapeia todos os pontos do seu domínio para o $f(s)$, pois só tem um ponto no domínio dela: o próprio s.

[5] Concluir que o domínio da f é o A não é interessante.

(36) **F**

Seja $f : A \to B$ e suponha que $f^{\mathrm{L}}, f^{\mathrm{R}} : B \to A$ são $\circ$-inversos esquerdo e direito da f (respectivamente).

(18) **F1.** Demonstre que f é bijetora (e logo tem inverso f^{-1}).

DEMONSTRAÇÃO.

INJETORIDADE. Sejam $a, a' \in A$.

$$
\begin{aligned}
fa = fa' &\implies f^{\mathrm{L}}(fa) = f^{\mathrm{L}}(fa') && \text{(aplicando a } f^{\mathrm{L}} \text{ aos dois lados)}\\
&\implies (f^{\mathrm{L}} f)a = (f^{\mathrm{L}} f)a' && \text{(def. } f^{\mathrm{L}} f)\\
&\implies \mathit{1}_A a = \mathit{1}_A a' && \text{(LInv)}\\
&\implies a = a'. && \text{(def. } \mathit{1}_A)
\end{aligned}
$$

SOBREJETORIDADE. Seja $b \in B$.
Procuro membro de A que f mapeia para o b.
Afirmo que $f^{\mathrm{R}} b$ é um tal membro de A.
Verifico:

$$
\begin{aligned}
f(f^{\mathrm{R}} b) &= (f f^{\mathrm{R}})b && \text{(def. } (f f^{\mathrm{R}}))\\
&= \mathit{1}_B b && \text{(RInv)}\\
&= b. && \text{(def. } \mathit{1}_B)
\end{aligned}
$$

(18) **F2.** Podemos concluir $f^{\mathrm{L}} = f^{-1} = f^{\mathrm{R}}$? Demonstre tua afirmação.

RESPOSTA & DEMONSTRAÇÃO.

Sim.

Calculamos:

$$f^{\mathrm{L}} = f^{\mathrm{L}} \mathit{1}_B = f^{\mathrm{L}}(f f^{-1}) = (f^{\mathrm{L}} f) f^{-1} = \mathit{1}_A f^{-1} = f^{-1} = f^{-1} \mathit{1}_B = f^{-1}(f f^{\mathrm{R}}) = (f^{-1} f) f^{\mathrm{R}}) = \mathit{1}_A f^{\mathrm{R}} = f^{\mathrm{R}}$$

onde eu usei (respectivamente) as leis:
(Id); (Inv); (Ass); (LInv); (Id); (Id); (RInv); (Ass); (Inv); (Id).

Só isso mesmo.