FMC2, 2019.1
(Turma T34 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28; bonus: $0^\flat$; time: 33')

Nome: Θάνος **Gabarito**

15/03/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em ambos os problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(8) **A**

Escreva uma definição completa e formal do operador unário da intersecção.
DEFINIÇÃO:

Seja $\mathscr{A}$ conjunto. A intresecção de $\mathscr{A}$ é o conjunto $\bigcap \mathscr{A}$ definido pela

$$x \in \bigcap \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ para todo } A \in \mathscr{A}.$$

(16) **B**

Seja $\{A_n\}_n$ uma seqüência (infinita) de conjuntos. A afirmação

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

é verdadeira? Se sim, demonstre; se não, refute; se os dados não são suficientes para concluir, mostre um exemplo e um contraexemplo.
RESPOSTA: SIM .

"$\subseteq$": Seja $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.
Pela hipótese, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. (def. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$)
Logo (com $n := 0$) temos o desejado $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} A_m$.

"$\supseteq$": Seja $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, ou seja, x pertence a todos os A_n's.
Preciso mostrar que

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Seja $w \in \mathbb{N}$ então, e agora basta mostrar que

$$x \in \bigcap_{m=w}^{\infty} A_m.$$

Seja $m \geq w$ então. Preciso mostrar que $x \in A_m$; que segue imediatamentea pela hipótese (tomando $n := m$).

(28) **C**

(10) **C1.** Sejam A conjunto e $\mathscr{A} \subseteq \wp A$ tal que

$$\bigcup \mathscr{A} = A.$$

A afirmação

$$A \in \mathscr{A}$$

é verdadeira? Se sim, demonstre; se não, refute; se os dados não são suficientes para concluir, mostre um exemplo e um contraexemplo.

RESPOSTA: DEPENDE .

EXEMPLO. Tome

$$\begin{aligned} A &= \{1,2\} \\ \mathscr{A} &= \{\{1\},\{1,2\}\} \subseteq \wp A \end{aligned}$$

Observe que realmente $\bigcup \mathscr{A} = A$ e que $A \in \mathscr{A}$.

CONTRAEXEMPLO. Tome

$$\begin{aligned} A &= \{1,2\} \\ \mathscr{A} &= \{\{1\},\{2\}\} \subseteq \wp A \end{aligned}$$

Observe que realmente $\bigcup \mathscr{A} = A$ mas mesmo assim $A \notin \mathscr{A}$.

Definição. Seja $\mathscr{A}$ uma família de conjuntos. Chamamos a $\mathscr{A}$ de $\subseteq$-*chain* sse

para todo $A, B \in \mathscr{A}$, temos $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

(18) **C2.** Seja $\mathscr{C}$ uma $\subseteq$-chain, e seja $T = \bigcup \mathscr{C}$. A afirmação

$$\mathscr{C} \cup \{T\} \text{ é uma chain}$$

é verdadeira? Se sim, demonstre; se não, refute; se os dados não são suficientes para concluir, mostre um exemplo e um contraexemplo.

RESPOSTA: SIM .

Vou demonstrar que $\mathscr{C} \cup \{T\}$ é uma chain.

Sejam $A, B \in \mathscr{C} \cup \{T\}$. Preciso mostrar que $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Vou separar em casos dependendo de se os A, B pertencem à $\mathscr{C}$ ou ao $\{T\}$.

CASO AMBOS PERTENCEM À $\mathscr{C}$.
Como $\mathscr{C}$ é chain, temos imediatamente $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

CASO EXATAMENTE UM PERTENCE À $\mathscr{C}$.
Chame C aquele que pertence à $\mathscr{C}$. O outro pertence ao $\{T\}$ e logo é o próprio $T = \bigcup \mathscr{C}$. Vou mostrar que $C \subseteq T$. Seja $c \in C$. Preciso mostrar que c pertence em algum dos membros do $\mathscr{C}$, que acontece pois $C \in \mathscr{C}$.

CASO NENHUM PERTENCE À $\mathscr{C}$.
Ou seja, ambos pertencem ao $\{T\}$; ou seja $A = B = T$; e logo $A \subseteq B$.

Só isso mesmo.