FMC2, 2019.1
(Turma N34 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28; bonus: $0^\flat$; time: 33')

Nome: Θάνος **Gabarito**

15/03/2019

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 1 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em ambos os problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(8) **A**

Escreva uma definição completa e formal da união duma seqüência (infinita) de conjuntos.
DEFINIÇÃO:

Seja $\{A_n\}_n$ seqüência de conjuntos. Definimos sua união $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ pela

$$x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \overset{\text{def}}{\iff} x \in A_n \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

(16) **B**

Seja $\mathscr{A}$ família de conjuntos tal que

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcap \mathscr{A}.$$

O que mais (interessante)[5] podes concluir sobre a $\mathscr{A}$? (Demonstre tua afirmação.)
RESPOSTA.

Vou demonstrar que $\mathscr{A}$ tem exatamente um membro ($\mathscr{A}$ é um singleton).

$\mathscr{A}$ TEM PELO MENOS UM MEMBRO.
Se $\mathscr{A}$ fosse vazio não teriamos $\bigcup \mathscr{A} = \bigcap \mathscr{A}$, pois o primeiro é o vazio e o segundo o universo.

$\mathscr{A}$ TEM NO MÁXIMO UM MEMBRO.
Sejam $A, B \in \mathscr{A}$. Vou mostrar que $A = B$.
"$\subseteq$": Para qualquer x temos:

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in \bigcup \mathscr{A} && (A \in \mathscr{A} \text{ e def. } \bigcup \mathscr{A}) \\ &\implies x \in \bigcap \mathscr{A} && (\bigcup \mathscr{A} = \bigcap \mathscr{A}) \\ &\implies x \in B && (B \in \mathscr{A} \text{ e def. } \bigcap \mathscr{A}) \end{aligned}$$

A "$\supseteq$" é similar.

ALTERNATIVAMENTE, USANDO REDUCTIO AD ABSURDUM:
Para chegar numa contradição suponha que $A \neq B$. Logo seja $t \in A \triangle B$, ou seja t pertence a um dos A, B mas não ao outro. Logo $t \in \bigcup \mathscr{A}$ e $t \notin \bigcap \mathscr{A}$, absurdo.

[5] Concluir que $\bigcup \mathscr{A} = \bigcap \mathscr{A}$ não é interessante.

(28) **C**

Seja $\{A_n\}_n$ seqüência (infinita) de conjuntos.

(10) **C1.** Defina recursivamente uma seqüência de conjuntos $\{D_n\}_n$ tal que (informalmente):

$$D_k = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

DEFINIÇÃO.

$$D_0 = \emptyset$$
$$D_{n+1} = D_n \cup A_n$$

(18) **C2.** Demonstre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Por indução.

BASE: $D_0 \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$. Imediato pois $D_0 = \emptyset$.

PASSO INDUTIVO. Seja $w \in \mathbb{N}$ tal que

$$D_w \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m. \tag{H.I.}$$

Preciso provar que

$$D_{w+1} \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m.$$

Seja $d \in D_{w+1}$. Basta mostrar que

$$d \in \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m,$$

ou seja, que d pertence a algum dos A_m's.

Pela definição de $D_{w+1} = D_w \cup A_w$, temos que $d \in D_w$ ou $d \in A_w$. Separo em casos:

CASO $d \in D_w$. Imediatamente pela H.I.:

$$d \in D_w \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m.$$

CASO $d \in A_w$. Imediato.

Só isso mesmo.