FMC2, 2019.1
(Turma T34+N12 do Thanos)

Provinha 0
(points: 0; bonus: $0^\flat$; time: 66'+33')

Alun∗: **Prof∗:**

16/12/2019

Instruções:

Modo aluno: Escreva teu nome no campo "Alun∗" em cima, e use a mesma caneta para responder em todos os problemas da prova.

No tempo determinado entregue tua prova para receber uma de outro aluno da turma.

Modo professor: Usando uma caneta de cor diferente daquela que teu aluno escolheu usar, escreva teu nome no campo "Prof∗" em cima, e corrija sua prova. Não escreva qual seria uma resposta correta, apenas identifique os erros, dando uma curta explicação quando possível.

Lembre-se:

Definição 1.
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. O a *divide* o b (escrevemos $a \mid b$) sse[1] existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $aq = b$.

Definição 2.
Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ sse $m \mid a - b$.

[1] escrevemos *sse* como uma abreviação da frase *se e somente se*

A

A1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) de "primo". Não suponha que o leitor sabe o que é um número composto.

DEFINIÇÃO.

Um número inteiro x é *primo* sse $x > 1$ e para todo inteiro d, se $d \mid x$ então $|d| = 1$ ou $|d| = x$.

A2. Usando uma fórmula de lógica, expressa a afirmação

"tem números pares que são divisíveis por todos os inteiros".

FÓRMULA:

$$(\exists a \in \mathbb{Z})\,[\,\mathrm{Even}(a) \land (\forall n \in \mathbb{Z})\,[\,n \mid a\,]\,]$$

$$\text{onde:} \quad \begin{cases} x \mid y \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})\,[\,xk = y\,] \\ \mathrm{Even}(x) \overset{\text{def}}{\iff} 2 \mid x \end{cases}$$

B

Prove ou refute a afirmação:

$$\textit{para todo inteiro } a \textit{ e todo inteiro } m > 1, \quad a \equiv a \pmod{m}.$$

Podes usar *apenas* as definições; qualquer outra afirmação que tu precisarás, deves demonstrar.

PROVA OU REFUTAÇÃO.

Eu vou provar a afirmação.

Sejam $a, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$.

$$\begin{aligned} a \equiv a \pmod{m} &\iff m \mid a - a && \text{(def. 2)} \\ &\iff m \mid 0. \end{aligned}$$

Basta então demonstrar que $m \mid 0$.

Realmente, como $m \cdot 0 = 0$ e $0 \in \mathbb{Z}$, temos que $m \mid 0$ (pela def. 1).

C

Os *números Fibonacci* e os *números Lucas* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 & \qquad L_0 &= 2 \\ F_1 &= 1 & L_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n & L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n. \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$, seja $\ell : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ a função definida pela equação

$$\ell(n) = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Prove por indução que para todo $n \geq 1$, $L_n = \ell(n)$.

PROVA.

Nos vamos provar por indução que *para todo* $n \geq 1$, $L_n = \ell(n)$. Vamos primeiramente verificar que para $n = 1$ e $n = 2$, realmente temos $L_n = \ell(n)$:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 && \text{(def. de } L_n) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_2 &= L_1 + L_0 && \text{(def. de } L_n) \\ &= 1 + 2 && \text{(def. de } L_n) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(1) &= F_0 + F_2 && \text{(def. de } \ell(n)) \\ &= 0 + F_1 + F_0 && \text{(def. de } F_n) \\ &= 0 + 1 + 0 && \text{(def. de } F_n) \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ell(2) &= F_1 + F_3 && \text{(def. de } \ell(n)) \\ &= 1 + F_2 + F_1 && \text{(def. de } F_n) \\ &= 1 + F_1 + F_0 + 1 && \text{(def. de } F_n) \\ &= 1 + 1 + 0 + 1 && \text{(def. de } F_n) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Agora supondo que para um natural $k \geq 3$ temos

$$L_{k-1} = \ell(k-1) \qquad \text{e} \qquad L_{k-2} = \ell(k-2) \tag{H.I.}$$

(hipoteses indutivas), precisamos provar que

$$L_k = \ell(k).$$

Realmente temos

$$\begin{aligned} L_k &= L_{k-1} + L_{k-2} && \text{(def. de } L_n;\ k \geq 2) \\ &= \ell(k-1) + \ell(k-2) && \text{(H.I.)} \\ &= (F_{k-2} + F_k) + (F_{k-3} + F_{k-1}) && \text{(def. de } \ell(n);\ k \geq 3) \\ &= \underbrace{F_{k-2} + F_{k-3}}_{F_{k-1}} + \underbrace{F_k + F_{k-1}}_{F_{k+1}} && \text{(ass. e com. de +)} \\ &= F_{k-1} + F_{k+1} && \text{(def. de } F_n;\ k \geq 3) \\ &= \ell(k) && \text{(def. de } \ell(n);\ k \geq 1), \end{aligned}$$

que termina nossa prova.

Só isso mesmo.