FMC2, 2018.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 64')

Nome:

10/12/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b \, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \qquad \text{(ZF1)}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \qquad \text{(ZF2)}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \qquad \text{(ZF3)}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \qquad \text{(ZF4)}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \qquad \text{(ZF5)}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \qquad \text{(ZF6)}$$

Infinity.

$$\exists i \, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \qquad \text{(ZF7)}$$

Definições:

$$\wp A \stackrel{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$
$$\wp_f A \stackrel{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$
$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$
$$\overline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$
$$(A \to B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$$
$$\downarrow a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$$
$$\uparrow a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$$

$$A =_{\text{c}} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\, B \text{ são equinúmeros}$$
$$A \leq_{\text{c}} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C \, (C \subseteq B \;\land\; A =_{\text{c}} C)$$
$$f : A \rightarrowtail B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$
$$D \text{ downset} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\, (\forall x \in P)\, [\, x \leq d \implies x \in D\,]$$
$$U \text{ upset} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\, (\forall x \in P)\, [\, u \leq x \implies x \in U\,]$$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N} \,;\, 0, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$0 \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessores diferentes:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$0 \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: para todo $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(0 \in X \land \forall n \, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Boas provas!

(26) **A**

Escolhe **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(13) **A1.** Seja $\langle A \ ; \ \leq \rangle$ um conjuntos parcialmente ordenado. Prove que para todo $X \subseteq A$, se $\inf X$ existe, então ele é único e demonstre *curtamente* que o $\inf X$ não existe necessariamente.

RESPOSTA.

(26) **A2.** Seja $(\langle A_i \ ; \ \leq_i \rangle)_{i \in \mathcal{I}}$ uma família indexada por $\mathcal{I}$, de conjuntos *totalmente* ordenados. Defina no $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i$ a ordem pointwise:

$$(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \leq (y_i)_{i \in \mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall i \in \mathcal{I}) \left[\, x_i \leq_i y_i \, \right].$$

Afirmação: *a ordem $\leq$ é total.*

- Se os dados são suficientes para demonstrar, demonstre.
- Se os dados são suficientes para refutar, refute.
- Caso contrário, construa um exemplo e um contraexemplo.

(Considere que já sabemos que $\leq$ é uma ordem parcial.)

RESPOSTA.

(32) **B**

Prove ou refute **exatamente uma** das afirmações:

(8) (i) O conjunto $\mathbb{N}^2$ é contável.

(12) (ii) O conjunto $(\mathbb{N} \to \{0,1\})$ é contável.

(16) (iii) O conjunto $\mathbb{R}$ é contável.

(16) (iv) Para todo conjunto A, A', B, B' com $A =_{\mathrm{c}} A'$ e $B =_{\mathrm{c}} B'$, $(A \to B) =_{\mathrm{c}} (A' \to B')$.

(24) (v) Para todo conjunto infinito A, B, $(A \times B) \leq_{\mathrm{c}} (A \to B)$.

(32) (vi) Para todo conjunto A, B, C, $(A \to (B \to C)) =_{\mathrm{c}} ((A \times B) \to C)$.

Prova/Refutação da afirmação ________ .

(42) **C**

Escolhe **exatamente um** dos **C1**, **C2**, **C3**.

(12) **C1.** Para todo conjunto a, o $\{a\}$ também é conjunto.

Prova pelos ZF1–ZF7.

(24) **C2.** Para todo conjunto a, o $\{a\}$ também é conjunto.

Prova pelos ZF1+ZF2+ZF4+ZF5+ZF6+ZF7.

(42) **C3.** Considere os axiomas seguintes:

$$\exists s \exists t \ (s \in t) \tag{ZF2*}$$

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subsetneq a) \tag{ZF5a}$$

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a \land \mathrm{Singleton}(x)) \tag{ZF5b}$$

Na teoria ZF1+ZF2*+ZF3+ZF5a+ZF5b+ZF6:

(21) Demonstre o ZF2 ou explique por que ele não é demonstrável.

(21) Demonstre o ZF5 ou explique por que ele não é demonstrável.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

RASCUNHO