**FMC2, 2018.2**
(Turma N12 do Thanos)

**Prova 3.1**
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 64')

---

**Nome:**

---

*10/12/2018*



## Regras:

**I.** Não vires esta página antes do começo da prova.

**II.** Nenhuma consulta de qualquer forma.

**III.** Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

**IV.** Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

**V.** $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

**VI.** Use caneta para tuas respostas.

**VII.** Responda dentro das caixas indicadas.

**VIII.** Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

**IX.** Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

**X.** Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

**XI.** Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

# Axiomas ZF

**Extensionality.**

$$\forall a \forall b \, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \qquad \text{(ZF1)}$$

**Emptyset.**

$$\exists e \forall x (x \notin e) \qquad \text{(ZF2)}$$

**Pairset.**

$$\forall a \forall b \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \qquad \text{(ZF3)}$$

**Separation (schema).**
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \qquad \text{(ZF4)}$$

**Powerset.**

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \qquad \text{(ZF5)}$$

**Unionset.**

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \qquad \text{(ZF6)}$$

**Infinity.**

$$\exists i \, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \qquad \text{(ZF7)}$$

## Definições:

$$\wp A \overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$

$$\wp_f A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$

$$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

$$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$

$$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$$

$$\downarrow a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$$

$$\uparrow a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$$

$$A =_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A, B \text{ são equinúmeros}$$

$$A \leq_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C \, (C \subseteq B \;\land\; A =_{\mathrm{c}} C)$$

$$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$

$$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$

$$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$

$$D \text{ downset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\, (\forall x \in P)\, [\, x \leq d \implies x \in D\,]$$

$$U \text{ upset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\, (\forall x \in P)\, [\, u \leq x \implies x \in U\,]$$

**Definição.** Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N} \,;\, \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1) Zero é um número natural: $\mathsf{0} \in \mathbf{N}$

(P2) O sucessor é uma operação unária nos naturais: $\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$

(P3) Naturais diferentes tem sucessores diferentes: $\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$

(P4) Zero não é o sucessor de nenhum natural: $\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$

(P5) Os naturais satisfazem o princípio da indução:

*Princípio da indução*: *para todo* $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n \, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

*Boas provas!*

(26) **A**

Escolhe **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(13) **A1.** Seja $\langle A\ ;\ \leq \rangle$ um conjuntos parcialmente ordenado. [redacted], se [redacted], então [redacted] e demonstre *curtamente* que [redacted].

Resposta.

(26) **A2.** Seja [redacted], [redacted].
Defina no [redacted] a ordem [redacted]:

$$[\text{redacted}] \leq [\text{redacted}] \overset{\text{def}}{\iff} [\text{redacted}].$$

Afirmação: *a ordem $\leq$ é total.*

- Se os dados são suficientes para demonstrar, demonstre.
- Se os dados são suficientes para refutar, refute.
- Caso contrário, construa um exemplo e um contraexemplo.

(Considere que já sabemos que $\leq$ é uma ordem parcial.)

Resposta.

(32) **B**

Prove ou refute **exatamente uma** das afirmações:

(8) (i) O conjunto [redacted]

(12) (ii) O conjunto [redacted] é contável.

(16) (iii) O conjunto [redacted]

(16) (iv) [redacted] conjunto [redacted]

(24) (v) Para todo conjunto infinito $A, B$, [redacted]

(32) (vi) [redacted] conjunto [redacted]

PROVA/REFUTAÇÃO DA AFIRMAÇÃO __________ .

(42) **C**

Escolhe **exatamente um** dos **C1**, **C2**, **C3**.

(12) **C1.** Para todo [redacted], [redacted] é conjunto.

PROVA PELOS ZF1–ZF7.

(24) **C2.** Para todo [redacted], [redacted] é conjunto.

PROVA PELOS ZF1+ZF2+ZF4+ZF5+ZF6+ZF7.

(42) **C3.** Considere os axiomas seguintes:

[redacted] (ZF2*)

[redacted] (ZF5a)

[redacted] (ZF5b)

Na teoria ZF1+ZF2*+ZF3+ZF5a+ZF5b+ZF6:

(21) Demonstre o ZF2 ou explique por que ele não é demonstrável.

(21) Demonstre o ZF5 ou explique por que ele não é demonstrável.

Só isso mesmo.