FMC2, 2018.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 64')

Nome: Θάνος **Gabarito**

10/12/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \qquad \text{(ZF1)}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \qquad \text{(ZF2)}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \qquad \text{(ZF3)}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \qquad \text{(ZF4)}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \qquad \text{(ZF5)}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \qquad \text{(ZF6)}$$

Infinity.

$$\exists i\, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \qquad \text{(ZF7)}$$

Definições:

$$\wp A \overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A$$
$$\wp_f A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$$
$$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$
$$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$$
$$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$$
$${\downarrow} a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$$
$${\uparrow} a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$$

$$A =_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\ B \text{ são equinúmeros}$$
$$A \leq_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C\, (C \subseteq B \ \land\ A =_{\mathrm{c}} C)$$
$$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$
$$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$
$$D \text{ downset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\, (\forall x \in P)\, [\, x \leq d \implies x \in D\,]$$
$$U \text{ upset} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\, (\forall x \in P)\, [\, u \leq x \implies x \in U\,]$$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}\,;\, \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$\mathsf{0} \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessores diferentes:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: *para todo* $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n\, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Boas provas!

(26) **A**

Escolhe **exatamente um** dos **A1**, **A2**.

(13) **A1.** Seja $\langle A\ ;\ \leq\rangle$ um conjuntos parcialmente ordenado. Prove que para todo $X \subseteq A$, se $\inf X$ existe, então ele é único e demonstre *curtamente* que o $\inf X$ não existe necessariamente.

RESPOSTA.

Sejam x, x' infima de X. Logo ambos os x, x' são lower bounds. Como x é infimumum e x' é lower bound, temos $x \geq x'$; e similarmente como x' é infimum e x é lower bound temos $x' \geq x$; e logo pela antissimetria da $\leq$ temos $x = x'$.

Como contraexemplo tome $A := \langle \mathbb{R}\ ;\ \leq\rangle$ com sua ordem canônica e $X := \mathbb{R}$. O X não possui infimum pois nem tem lower bounds.

(26) **A2.** Seja $(\langle A_i\ ;\ \leq_i\rangle)_{i\in\mathcal{I}}$ uma família indexada por $\mathcal{I}$, de conjuntos *totalmente* ordenados. Defina no $\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i$ a ordem pointwise:

$$(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \leq (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \overset{\text{def}}{\iff} (\forall i \in \mathcal{I})\,[\,x_i \leq_i y_i\,]\,.$$

Afirmação: *a ordem $\leq$ é total.*

- Se os dados são suficientes para demonstrar, demonstre.
- Se os dados são suficientes para refutar, refute.
- Caso contrário, construa um exemplo e um contraexemplo.

(Considere que já sabemos que $\leq$ é uma ordem parcial.)

RESPOSTA.

Os dados não são suficientes.

EXEMPLO. Tome $\mathcal{I} := \{1\}$ e $A_1 := \{5\}$ com a única órdem possível, com $5 \leq 5$. Temos então $\prod_i A_i = A_1 = \{5\}$. Observe que a $\leq$ é trivialmente total.

CONTRAEXEMPLO. Já com $\mathcal{I} := \{1, 2\}$ temos um contraexemplo, tomando $A_1 := A_2 := \{0, 1\}$ ambos com a ordem comum onde $0 \leq 1$. Observe que $(0, 1) \not\leq (1, 0)$ e também $(1, 0) \not\leq (0, 1)$ e logo a $\leq$ não é total.

(32) ## B

Prove ou refute **exatamente uma** das afirmações:

(8) (i) O conjunto $\mathbb{N}^2$ é contável.

(12) (ii) O conjunto $(\mathbb{N} \to \{0,1\})$ é contável.

(16) (iii) O conjunto $\mathbb{R}$ é contável.

(16) (iv) Para todo conjunto A, A', B, B' com $A =_{\mathrm{c}} A'$ e $B =_{\mathrm{c}} B'$, $(A \to B) =_{\mathrm{c}} (A' \to B')$.

(24) (v) Para todo conjunto infinito A, B, $(A \times B) \leq_{\mathrm{c}} (A \to B)$.

(32) (vi) Para todo conjunto A, B, C, $(A \to (B \to C)) =_{\mathrm{c}} ((A \times B) \to C)$.

Prova/Refutação da afirmação ________ .

Os (i)–(iii) são extremamente conhecidos: o (i) pelo primeiro argumento diagonal de Cantor; os (ii)–(iii) pelo segundo. Precisamos tomar cuidado caso que escolher o (iii) para evitar problemas com a representação não-única de certos números.

(iv) Sejam $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A'$ e $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B'$ as bijecções garantidas pelas hipoteses.
Definimos a função $F : (A \to B) \to (A' \to B')$ pela

$$F(t) = g \circ t \circ f^{-1}.$$

Sobrejetora: Seja $s \in (A' \to B')$. Defina a $w \in (A \to B)$ pela $w = g^{-1} \circ s \circ f$ e observe que realmente $F(w) = s$:

$$F(w) = gwf^{-1} = g(g^{-1}sf)f^{-1} = (gg^{-1})s(ff^{-1}) = s.$$

Injetora: Sejam $t, t' \in (A \to B)$; temos:

$$\begin{aligned} F(t) = F(t') &\implies gtf^{-1} = gt'f^{-1} \\ &\implies g^{-1}gtf^{-1} = g^{-1}gt'f^{-1} \\ &\implies g^{-1}gtf^{-1}f = g^{-1}gt'f^{-1}f \\ &\implies t = t'. \end{aligned}$$

(v) Sejam A, B infinitos e sejam $b_0, b_1 \in B$ com $b_0 \neq b_1$.
Definimos a $F : (A \times B) \to (A \to B)$ pela

$$F(a,b) = \begin{cases} \lambda x.\textbf{if } x = a \textbf{ then } b \textbf{ else } b_0, & \text{se } b \neq b_0 \\ \lambda x.\textbf{if } x = a \textbf{ then } b \textbf{ else } b_1, & \text{se } b = b_0 \end{cases}$$

(vi) Essa também é muito conhecida, então omito os detalhes: as *curry* e *uncurry* são as testemunhas das $\leq_{\mathrm{c}}$ e $\geq_{\mathrm{c}}$ que desejamos; e acontece que cada uma é inversa da outra então nem precisamos utilizar o Schröder–Bernstein nesse caso.

(42) **C**

Escolhe **exatamente um** dos **C1**, **C2**, **C3**.

(12) **C1.** Para todo conjunto a, o $\{a\}$ também é conjunto.

Prova pelos ZF1–ZF7.

Seja a conjunto. Pelo ZF3 temos que $\{a, a\}$ é conjunto, e pelo ZF1 temos $\{a, a\} = \{a\}$.

(24) **C2.** Para todo conjunto a, o $\{a\}$ também é conjunto.

Prova pelos ZF1+ZF2+ZF4+ZF5+ZF6+ZF7.

Seja a conjunto. Pelo Powerset temos $\wp a$ conjunto. Agora pelo separation com $\varphi(x) := x = a$ construimos o $\{a\}$.

(42) **C3.** Considere os axiomas seguintes:

$$\exists s \exists t\ (s \in t) \tag{ZF2*}$$

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow x \subsetneq a) \tag{ZF5a}$$

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a \land \mathrm{Singleton}(x)) \tag{ZF5b}$$

RASCUNHO.
Primeiramente quero entender esses três axiomas: o ZF2* afirma que existe conjunto com pelo menos um membro; o ZF5a permite construir o conjunto de todos os subconjuntos próprios de qualquer conjunto já construido; o ZF5b permite construir o conjunto de todos os singletons tomando membros dum conjunto já constuido.

Na teoria ZF1+ZF2*+ZF3+ZF5a+ZF5b+ZF6:

(21) DEMONSTRE O ZF2 OU EXPLIQUE POR QUE ELE NÃO É DEMONSTRÁVEL.

Eu vou construir um (e logo *o*) conjunto vazio. Vou denotar por $\wp_{\neq}$ o operador que retorna o conjunto de todos os subconjuntos próprios (definível pelo (ZF5a)).

Observe que aplicando o $\wp_{\neq}$ num singleton u, $\wp_{\neq} u$ é o conjunto de todos os subconjuntos próprios de u, mas o u sendo singleton só possui um subconjunto próprio: o $\emptyset$. Logo $\wp_{\neq} u = \{\emptyset\}$ e agora posso aplicar o $\bigcup -$ (definível pelo Unionset (ZF6)) nele para ganhar o próprio $\emptyset$, pois $\bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$. Então basta ACHAR UM SINGLETON:

Sejam s, t conjuntos tais que $s \in t$ (pelo ZF2*). Pelo Pairset (ZF3) agora construimos o $\{s\}$ (veja **C1**), e logo temos o que estávamos devendo construir: um singleton.

(21) DEMONSTRE O ZF5 OU EXPLIQUE POR QUE ELE NÃO É DEMONSTRÁVEL.

Seja a conjunto. Preciso construir o $\wp a$. Mas $\wp a = \wp_{\neq} a \cup \{a\}$. Temos o $\wp_{\neq}$ pelo ZF5a, e temos o $- \cup -$ pelo Unionset (ZF6) pois $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$, e temos os $\{-, -\}$ e $\{-\}$ pelo Pairset (ZF3).

Só isso mesmo.