
Nome:

16/11/2018

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2}))$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!
- XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.³
- XII. Responda em até 2 dos A, B, C, D, E.⁴

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas com respostas em mais que três problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembram-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G ; *, ^{-1}, e \rangle$ é um grupo sse:

$$(\forall a, b \in G) [a * b \in G] \quad (\text{G0})$$

$$(\forall a, b, c \in G) [a * (b * c) = (a * b) * c] \quad (\text{G1})$$

$$(\forall a \in G) [e * a = a = a * e] \quad (\text{G2})$$

$$(\forall a \in G) [a^{-1} * a = e = a * a^{-1}] \quad (\text{G3})$$

Se \mathcal{G} satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G) [a * b = b * a] \quad (\text{G4})$$

chamamos o \mathcal{G} grupo abeliano.

Definição 2. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \quad AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A, b \in B\} \quad \dots \text{etc.}$$

Definição 3 (subgrupo). Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Definição 4 (conjugação). Seja G grupo e $a, b \in G$. Chamamos o b conjugado de a sse existe $g \in G$ tal que $a = bgb^{-1}$. Escrevemos $a \approx b$.

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é subgrupo normal de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\stackrel{\text{def}}{\iff} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G, gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G, gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 6 (homomorfismo de grupo). Um homomorfismo φ do grupo $\langle A ; e_A, \cdot_A \rangle$ para o grupo $\langle B ; e_B, \cdot_B \rangle$ é uma função $\varphi : A \rightarrow B$ tal que:

- (i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;
- (ii) para todo $x \in A$, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$;
- (iii) $\varphi(e_A) = e_B$.

Definição 7 (kernel). Sejam A e B grupos e φ homomorfismo de A para B . Definimos

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}.$$

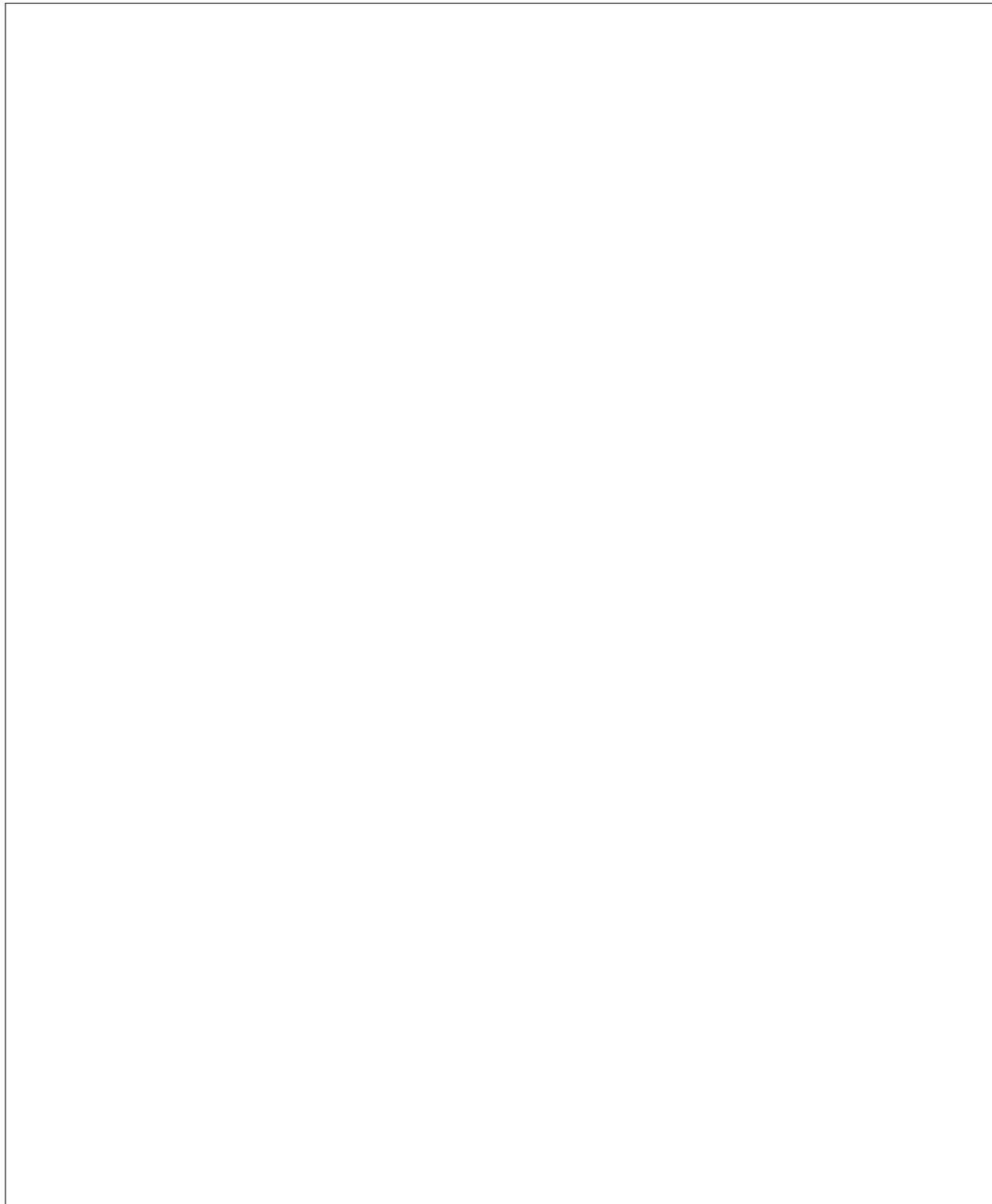
Boas provas!

(28) **A**

Prove “from scratch” (usando apenas os (G0)–(G3)) que o inverso de inverso dum membro de grupo é o próprio membro.

Dica: Pode provar lemmata (resultados intermediários) para te ajudar.

PROVA.

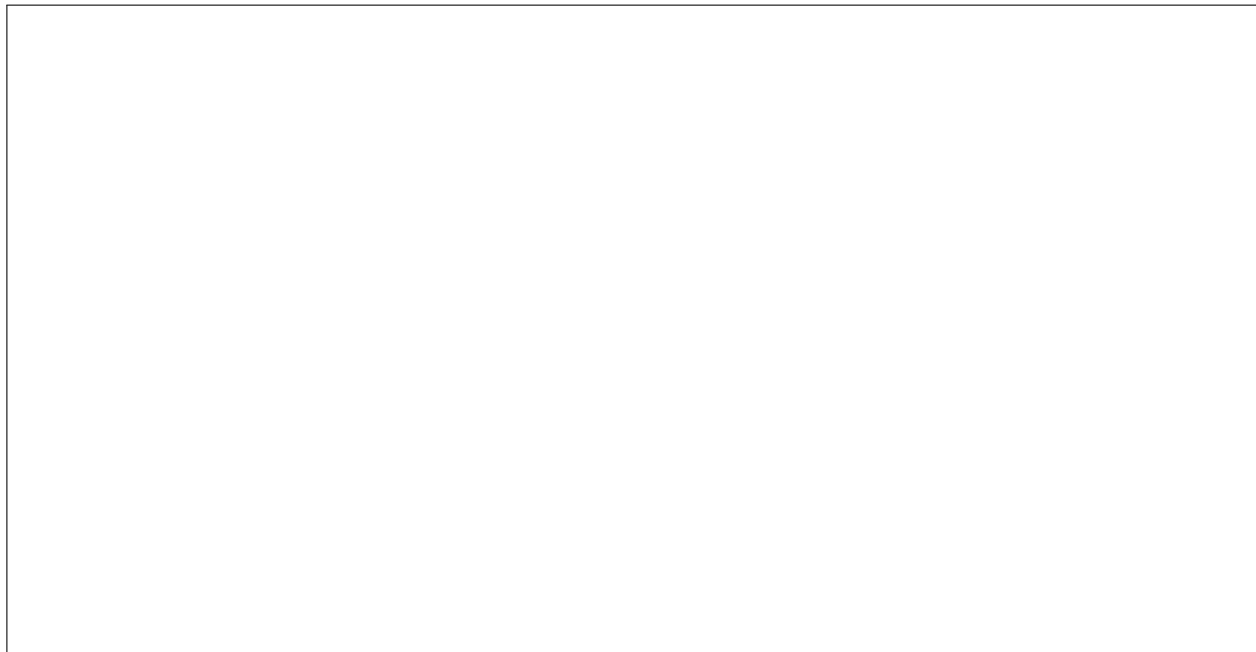


(30) **B**

Seja G grupo e $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de subgrupos de G . Prove que

$$\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \leq G.$$

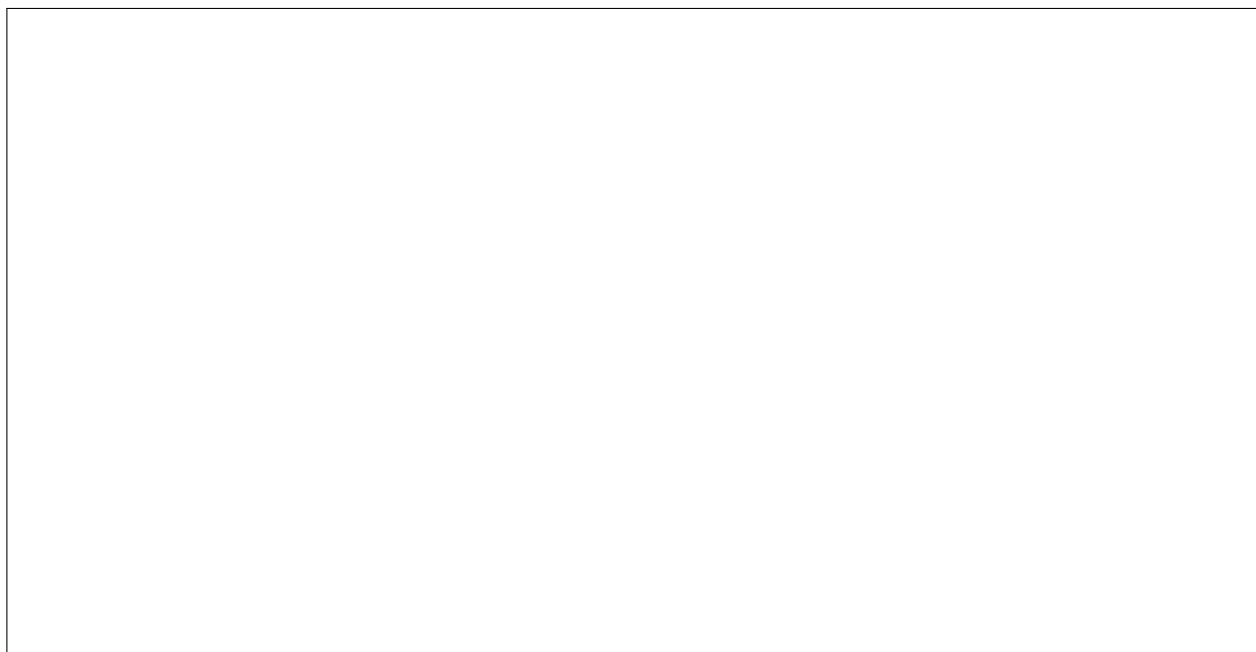
PROVA.



(30) **C**

Sejam G e H grupos, $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismo, e $B \leq H$. Prove que $\varphi^{-1}[B] \leq G$.

PROVA.



(34) **D**

Seja G grupo e $N \leq G$. Prove que:

$$N \trianglelefteq G \iff {}_N\equiv = \equiv_N$$

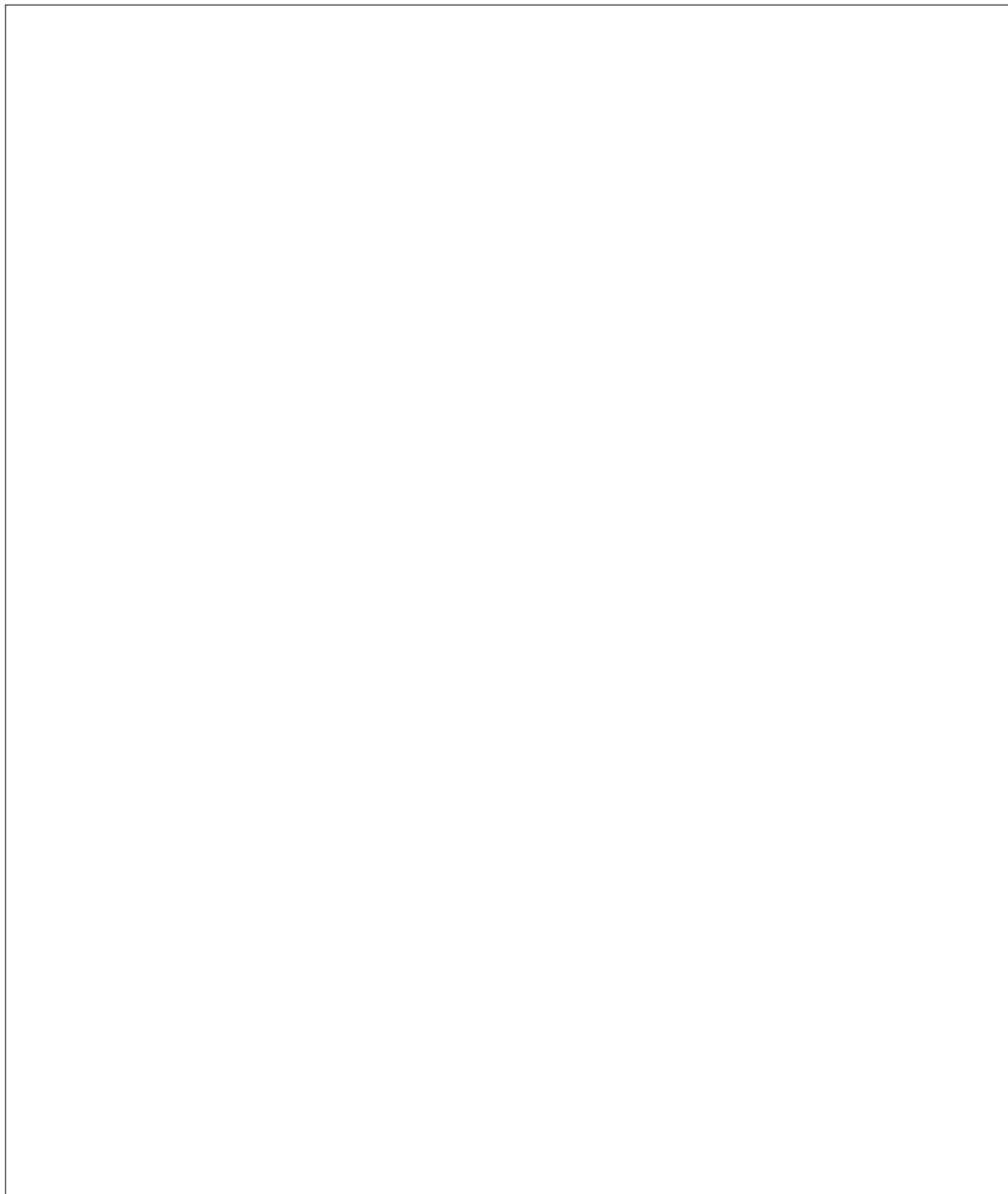
Onde ${}_N\equiv$ e \equiv_N são as relações de congruência módulo-esquerdo e módulo-direito N .

PROVA.

(42) **E**

Sejam G grupo e $N \trianglelefteq G$. Logo existem grupo G' e homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ tal que N é o kernel de φ .

PROVA.



(24) **L**

Definição. O conjunto estruturado $\mathcal{L} = \langle L ; \vee, \wedge \rangle$ onde *join* (\vee) e *meet* (\wedge) são operações binárias é um *reticulado* sse:

$$\begin{array}{lll} \text{(JA)} & a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c & a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \quad \text{(MA)} \\ \text{(JC)} & a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a \quad \text{(MC)} \\ \text{(JP)} & a \vee a = a & a \wedge a = a \quad \text{(MP)} \\ \text{(LJ)} & a \vee (a \wedge b) = a & a \wedge (a \vee b) = a \quad \text{(LM)} \end{array}$$

Um conjunto estruturado $\mathcal{B} = \langle B ; \vee, \wedge, \perp, \top \rangle$ (onde \perp, \top são constantes) que além das leis acima satisfaz também:

$$\text{(JI)} \quad a \vee \perp = a \quad a \wedge \top = a \quad \text{(MI)}$$

é chamado *reticulado limitado*.

(12) **L1. Teorema.** Seja $\mathcal{L} = \langle L ; \vee, \wedge \rangle$ um reticulado. Então para todo $a, b \in L$, temos

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a.$$

PROVA.

(12) **L2.** Como definirias (formalmente, com texto completo!) a afirmação que dois reticulados limitados são isórfos?

DEFINIÇÃO.

Só isso mesmo.

RASCUNHO

RASCUNHO