FMC2, 2018.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 2.1
(points: 100; bonus: $0^\flat$; time: 64')

Nome:

16/11/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$.**[4]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em mais que três problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembram-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\ ; *, {}^{-1}, e\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b \in G\,] \tag{G0}$$
$$(\forall a, b, c \in G)\,[\, a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$
$$(\forall a \in G)\,[\, e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$
$$(\forall a \in G)\,\left[\, a^{-1} * a = e = a * a^{-1}\,\right] \tag{G3}$$

Se $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b = b * a\,] \tag{G4}$$

chamamos o $\mathcal{G}$ *grupo abeliano*.

Definição 2. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad \ldots\text{etc.}$$

Definição 3 (subgrupo). Seja G grupo e $H \subseteq G$. O H é um subgrupo de G (escrevemos $H \leq G$) sse H forma um grupo com a mesma operação (restrita no $H \times H$).

Definição 4 (conjugação). Seja G grupo e $a, b \in G$. Chamamos o b conjugado de a sse existe $g \in G$ tal que $a = gbg^{-1}$. Escrevemos $a \approx b$.

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\stackrel{\text{def}}{\iff} N \text{ é fechado pelos conjugados} \\ &\iff \text{para todo } n \in N \text{ e } g \in G,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 6 (homomorfismo de grupo). Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A\ ; e_A, \cdot_A\rangle$ para o grupo $\langle B\ ; e_B, \cdot_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) para todo $x \in A$, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$;

(iii) $\varphi(e_A) = e_B$.

Definição 7 (kernel). Sejam A e B grupos e φ homomorfismo de A para B. Definimos

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}\,.$$

Boas provas!

(28) **A**

Prove "from scratch" (usando apenas os (G0)–(G3)) que o inverso de inverso dum membro de grupo é o próprio membro.

Dica: *Pode provar lémmata (resultados intermediários) para te ajudar.*

PROVA.

(30) **B**

Seja G grupo e $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de subgrupos de G. Prove que

$$\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \leq G.$$

PROVA.

(30) **C**

Sejam G e H grupos, $\varphi : G \to H$ homomorfismo, e $B \leq H$. Prove que $\varphi^{-1}[\,B\,] \leq G$.

PROVA.

(34) **D**

Seja G grupo e $N \leq G$. Prove que:

$$N \trianglelefteq G \iff {}_N\!\equiv \; = \; \equiv_N$$

Onde ${}_N\!\equiv$ e $\equiv_N$ são as relações de congruência módulo-esquerdo e módulo-direito N.
Prova.

(42) **E**

Sejam G grupo e $N \trianglelefteq G$. Logo existem grupo G' e homomorfismo $\varphi : G \to G'$ tal que N é o kernel de φ.
Prova.

(24) **L**

Definição. O conjunto estruturado $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \vee, \wedge \rangle$ onde *join* ($\vee$) e *meet* ($\wedge$) são operações binárias é um *reticulado* sse:

(JA)	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	(MA)
(JC)	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$	(MC)
(JP)	$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$	(MP)
(LJ)	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$	(LM)

Um conjunto estruturado $\mathcal{B} = \langle B \,;\, \vee, \wedge, \bot, \top \rangle$ (onde $\bot, \top$ são constantes) que além das leis acima satisfaz também:

(JI)	$a \vee \bot = a$	$a \wedge \top = a$	(MI)

é chamado *reticulado limitado*.

(12) **L1.** **Teorema.** Seja $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \vee, \wedge \rangle$ um reticulado. Então para todo $a, b \in L$, temos

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a.$$

PROVA.

(12) **L2.** Como definarias (formalmente, com texto completo!) a afirmação que dois reticulados limitados são isómorfos?

DEFINIÇÃO.

Só isso mesmo.

<u>Rascunho</u>

Rascunho