FMC2, 2018.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.3
(points: 42; bonus: $8^\flat$; time: 42')

Nome: Θάνος **Gabarito**

08/10/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

X. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XI. **Responda em até 2 dos A, B, C.**[4]

Lembram-se:

Notação.
$[a]_\sim$: a classe de equivalência do a através da $\sim$; $A/{\sim}$: o conjunto quociente do A sobre a $\sim$.
Glossário.

$x\,R\,x$	(reflexiva)
$x \not R\, x$	(irreflexiva)
$x\,R\,y \implies y\,R\,x$	(simétrica)
$x\,R\,y \implies y \not R\, x$	(assimétrica)
$x\,R\,y \;\&\; y\,R\,z \implies x\,R\,z$	(transitiva)
reflexiva & transitiva	(preordem)
reflexiva & transitiva & simétrica	(relação de equivalência)
reflexiva & transitiva & antissimétrica	(ordem (parcial))

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas nos três problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(12) **A1.** Seja R uma preordem num conjunto A. Prove que R é *idempotente*, ou seja, $R = R \circ R$.
PROVA.

Vou provar as duas direções separadamente.

$x \mathrel{R} y \implies x \mathrel{(R \circ R)} y$:
Suponha $x \mathrel{R} y$. Como R é reflexiva, logo $x \mathrel{R} x$. Pelas $x \mathrel{R} x$ e $x \mathrel{R} y$ concluimos que $x \mathrel{(R \circ R)} y$.

$x \mathrel{(R \circ R)} y \implies x \mathrel{R} y$:
Suponha $x \mathrel{(R \circ R)} y$. Logo $x \mathrel{R} w$ e $w \mathrel{R} y$ para algum $w \in A$ (pela def. de $\circ$), e logo pela transitividade da R temos $x \mathrel{R} y$.

(12) **A2.** Seja S uma relação binária no $\mathbb{R}$ tal que

$$(S \circ S^{\partial}) \text{ é irreflexiva.}$$

Qual é o gráfico da S? Prove tua resposta.

Dica: *(Custa 6pts.)* *Suponha* $\operatorname{graph}(S) \neq \emptyset$, *e logo seja* $(x, y) \in \operatorname{graph}(S)$.

PROVA.

$\operatorname{graph}(S) = \emptyset$.

Pois, supondo que tem membros, tome $(x, y) \in \operatorname{graph}(S)$, e agora: $x \mathrel{S} y$ e logo $y \mathrel{S^{\partial}} x$ (pela def. de S^{∂}). Logo $x \mathrel{(S \circ S^{\partial})} x$, que contradiza a irreflexividade da $S \circ S^{\partial}$.

(18) **B**

(3) **B1.** Defina com texto completo o conjunto quociente.
DEFINIÇÃO.

Seja $\sim$ relação de equivalência num conjunto A. O conjunto quociente de A sobre a $\sim$ é o conjunto

$$A/{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, [a]_\sim \mid a \in A \,\}\,.$$

(3) **B2.** Defina com texto completo o que é uma partição.
DEFINIÇÃO.

Seja A conjunto e $\mathscr{A} \subseteq \wp A$. Chamamos a $\mathscr{A}$ uma partição de A sse:
(1) $A \subseteq \bigcup \mathscr{A}$;   (por que escolhi "$\subseteq$" e não "$=$" aqui?)
(2) os membros da $\mathscr{A}$ são disjuntos dois-a-dois;
(3) $\emptyset \notin \mathscr{A}$.

(12) **B3.** Seja $\sim$ relação de equivalência num conjunto A. Prove que o conjunto quociente $A/{\sim}$ é uma partição do A.
PROVA.

Primeiramente observe que cada membro de $A/{\sim}$ é um subconjunto de A. Agora basta verificar as (1)–(3) da **B2**.

(1) Tome $a \in A$. Como $a \sim a$ (reflexividade), então $a \in [a]$. Agora como $[a] \in A/{\sim}$, temos que $a \in \bigcup(A/{\sim})$.

(2) Sejam $C, D \in A/{\sim}$. Logo sejam $c, d \in A$ tais que $C = [c]$ e $D = [d]$. Precisamos provar *qualquer uma* das duas implicações (são contrapositivas):

$$C \neq D \implies C \cap D = \emptyset;$$
$$C \cap D \neq \emptyset \implies C = D.$$

Vamos provar a segunda. Suponha $C \cap D \neq \emptyset$ e seja logo $w \in C \cap D$. Ou seja, $w \in C$ e $w \in D$, e logo $w \sim c$ e $w \sim d$. Queremos provar que $C = D$.
"$\subseteq$". Tome $x \in C = [c]$. Temos:

$$x \sim c \sim w \sim d$$

(simetria e transitividade da $\sim$) e logo $x \in [d] = D$ e $C \subseteq D$. A "$\supseteq$" é similar.

(3) Basta provar que para cada $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$. Isso é uma conseqüência da reflexividade da $\sim$, pois para todo $a \in A$, $a \in [a]$.

(18) **C**

Seja a relação $\rightarrow$ no $\mathbb{N}$ definida pela

$$a \rightarrow b \overset{\text{def}}{\iff} a + 1 = b.$$

(4) **C1.** Dê uma definição simples da relação $\rightarrow^n$ para quem não sabe nem de iterações nem de composições de relações (e sequer quer aprender essas noções).
DEFINIÇÃO.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos:

$$a \rightarrow^n b \iff a + n = b.$$

(14) **C2.** Prove tua afirmação, que a relação $\rightarrow^n$ é igual à relação que escreveu no **C1**.
PROVA.

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Vou provar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a \rightarrow^n b \iff a + n = b.$$

BASE. Temos

$$\begin{aligned} a \rightarrow^0 b &\iff a = b && \text{(pela def. } \rightarrow^0\text{)} \\ &\iff a + 0 = b. \end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a \rightarrow^k b \iff a + k = b. \qquad \text{(H.I.)}$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} a \rightarrow^{k+1} b &\iff a \,(\rightarrow^k \circ \rightarrow)\, b && \text{(def. } \rightarrow^{k+1}\text{)} \\ &\iff (\exists w)\big[\, a \rightarrow^k w \ \ \&\ \ w \rightarrow b \,\big] && \text{(def. } \circ\text{)} \\ &\iff (\exists w)\,[\, a + k = w \ \ \&\ \ w + 1 = b \,] && \text{(H.I.; def. de } \rightarrow\text{)} \\ &\iff (a + k) + 1 = b \\ &\iff a + (k + 1) = b. \end{aligned}$$

(8$^\flat$) **Z**

Seja $P \neq \emptyset$ um conjunto de pessoas e $C \neq \emptyset$ um conjunto de candidatos. Seja $\gtrdot$ a relação binária no C definida pela

$$x \gtrdot y \overset{\text{def}}{\iff} \text{a maioria da população do } P \text{ prefere } x \text{ do que } y.$$

Podemos concluir que $\gtrdot$ é transitiva?
Responde "sim" e prove; ou "não" e mostre um contraexemplo.
RESPOSTA.

Não. Sejam $P = \{p, q, r\}$ e $C = \{a, b, c\}$. Considere que as pessoas do P em ordem de preferência de melhor para pior têm:

$$p : a, b, c \qquad\qquad q : c, a, b \qquad\qquad r : b, c, a.$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} a &\gtrdot b, \quad \text{pois os } p, q \text{ preferem } a \text{ que } b,\\ b &\gtrdot c, \quad \text{pois os } p, r \text{ preferem } b \text{ que } c, \end{aligned}$$

mas $a \not\gtrdot c$ pois apenas o p prefere a que c. De fato, $c \gtrdot a$, pois os q, r preferem c que a.

<u>RASCUNHO</u>

Só isso mesmo.