FMC2, 2018.2
(Turma T34 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 76; bonus: $8^\flat$; time: 60')

Nome: Θάνος **Gabarito**

14/09/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 2 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.**[4]

Lembre-se a notação:

$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$	$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função injetora de A para B
$f[X] \overset{\text{def}}{=}$ a *imagem* de $X \subseteq \mathrm{dom} f$ através da f	$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função sobrejetora de A para B
$f^{-1}[Y] \overset{\text{def}}{=}$ a *preimagem* de $Y \subseteq \mathrm{cod} f$ através da f	$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função bijetora de A para B

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas que quebram essa regra não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

Em matemática as vezes aparece a notação $f(X)$ para denotar a imagem do $X \subseteq \mathrm{dom} f$ através da função f. Aqui usamos a notação $f[X]$. *Sem usar o conjunto vazio em lugar nenhum na tua resposta*, dê um exemplo (completo) que mostre que a notação $f(X)$ pode ser problemática (e logo nossa notação $f[X]$ é melhor). Explique *curtamente*.

RESPOSTA.

> Sejam $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, e $X = \{1, 2\}$. Observe que $X \in A$ e $X \subseteq A$. Seja $f : A \to \{3\}$ a função constante definida pela $f(x) = 3$. Assim a notação $f(X)$ fica ambígua: a f-imagem de $X \subseteq A$ é o $\{3\}$, mas o valor da f no X é o 3. E $3 \neq \{3\}$.

(36) **B**

Seja $f : A \to B$. A afirmação

$$f \text{ bijetora} \iff \text{para todo } b \in B,\ f^{-1}[\{b\}] \text{ é um conjunto unitário}$$

é verdadeira? Responda… (1) "sim", e prove; (2) "não", e refute; ou (3) "depende", e mostre dois exemplos: um onde a afirmação é verdadeira, e outro onde não é.

RESPOSTA (SIM / NÃO / DEPENDE).

> Sim!
>
> ($\Rightarrow$): Suponha que f bijetora, e seja $b \in B$. Vou demonstrar que $f^{-1}[\{b\}]$ é unitário. Vamos chamá-lo de A_b. Como f é sobrejetora, logo seja $a_b \in A$ tal que $f(a_b) = b$. Logo $a_b \in A_b$ pela definição da preimagem, e logo $A_b \neq \emptyset$ (pois tem pelo menos um membro). Basta mostrar que tem no máximo um membro. Sejam $a, a' \in A_b$ então e vamos mostrar que $a = a'$. *Pela escolha dos* a, a', temos $f(a) = f(a') = b$, e agora pela injetividade da f, temos o desejado $a = a'$.
>
> ($\Leftarrow$): Suponha que para todo $b \in B$, o $f^{-1}[\{b\}]$ é unitário. Preciso mostrar que f é injetora e sobrejetora.
>
> f INJETORA: Suponha que temos $x, y \in A$ tais que $f(x) = f(y)$ e chame esse valor comum de b. Basta provar que $x = y$. Pela hipótese, $f^{-1}[\{b\}]$ é um singleton, e pela escolha dos x, y sabemos que x, y pertencem a esse singleton. Logo $x = y$.
>
> f SOBREJETORA: Seja $b \in B$. Procuramos $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Pela hipótese, o conjunto $f^{-1}[\{b\}]$ é unitário (e logo não vazio). Tome a o (único) membro desse conjunto e observe que pela definição de preimagem temos que $f(a) = b$.

(40) **C**

(8) **C1.** Defina (com texto completo!) as *iterações* f^n duma função f.

DEFINIÇÃO.

Seja $f : A \to A$. Definimos as $f^n : A \to A$ recursivamente pelas:

$$\begin{aligned} f^0 &= 1_A \\ f^{n+1} &= f \circ f^n \end{aligned}$$

(32) **C2.** Sejam $f : A \to A$ um endomapa e $x \in A$. Chamamos o $x \in A$ um *fixpoint* da f sse $f(x) = x$. Prove ou refute a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

Vou provar a afirmação.

($\Rightarrow$): Suponha x é um fixpoint da f. Vou provar o que eu preciso por indução no n.

BASE: Calculamos:

$$\begin{aligned} f^0(x) &= 1_A(x) && \text{(pela def. da } f^0) \\ &= x && \text{(pela def. da } 1_A) \end{aligned}$$

e logo x é um fixpoint da f^0.

PASSO INDUTIVO: Suponha $k \in \mathbb{N}$ tal que x é um fixpoint da f^k (H.I.). Calculamos:

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= (f \circ f^k)(x) && \text{(pela def. de } f^{k+1}) \\ &= f\big(f^k(x)\big) && \text{(pela def. de } f \circ f^k) \\ &= f(x) && \text{(pois } x \text{ é um fixpoint da } f^k \text{ (H.I.))} \\ &= x && \text{(pois } x \text{ é um fixpoint da } f) \end{aligned}$$

e logo x é um fixpoint da f^{k+1}.

($\Leftarrow$): Usando nossa hipótese com $n := 1$, temos que x é um fixpoint da f^1. Mas f^1 é a propria f (pois $f^1 = f \circ f^0 = f \circ 1_A = f$) e logo x é um fixpoint da f.

($8^\flat$) **Z**

Sejam A, B, C conjuntos. Usando a notação λ, defina função com típo

$$\boxed{\lambda a.\, \lambda b.\, \langle (\lambda x.\, b), a, 42 \rangle\,.} : A \to \big(B \to \big((A \to B) \times (A \cup C) \times \mathbb{N}\big)\big).$$

Cuidado: sobre esses conjuntos não podes supor nada mais alem do fato que são conjuntos.

Só isso mesmo.