FMC2, 2018.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 34; bonus: $8^\flat$; time: 40')

Nome: Θάνος **Gabarito**

19/09/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la*.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Responda em até 1 dos A, B, C.[4]

Lembre-se a notação:

$(A \to B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$

$f[X] \stackrel{\text{def}}{=}$ a *imagem* de $X \subseteq \mathrm{dom} f$ através da f

$f^{-1}[Y] \stackrel{\text{def}}{=}$ a *preimagem* de $Y \subseteq \mathrm{cod} f$ através da f

$f : A \rightarrowtail B \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ é função injetora de A para B

$f : A \twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ é função sobrejetora de A para B

$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ é função bijetora de A para B

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas que quebram essa regra não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(16) **A**

Sejam B, C, D conjuntos, $g, h : C \to D$, e $f : B \twoheadrightarrow C$ sobrejetora. Prove a afirmação

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

PROVA.

Suponha que $g \circ f = h \circ f$. Vamos mostrar que $g = h$. Seja $c \in C$. Logo existe $b \in B$ tal que $f(b) = c$. Como

$$(g \circ f)(b) = (h \circ f)(b)$$

temos $g(f(b)) = h(f(b))$; e, pela escolha de b, $g(c) = h(c)$. Logo $g = h$.

(28) **B**

Seja $f : A \to B$. As afirmações seguintes

$$f(-) \text{ sobrejetora} \implies f^{-1}[-] \text{ injetora}$$
$$f(-) \text{ sobrejetora} \impliedby f^{-1}[-] \text{ injetora}$$

são verdadeiras? Para cada uma responda... (1) "sim", e prove; (2) "não", e refute; ou (3) "depende", e mostre dois exemplos: um onde a afirmação é verdadeira, e outro onde não é.

(14) **B1.** RESPOSTA "$\Rightarrow$" (SIM / NÃO / DEPENDE).

Sim!

(Observe que $f(-)$ é a própria f.)

Suponha f sobrejetora e sejam Y, Y' no $\mathrm{dom}(f^{-1}[-])$ tais que $Y \neq Y'$.
(Temos então $Y, Y' \subseteq B$.)
Basta provar que $f^{-1}[Y] \neq f^{-1}[Y']$.
Como $Y \neq Y'$, sem perda de generalidade, seja $d \in Y \setminus Y'$.
Como f é sobrejetora, seja $a_d \in A$ tal que $f(a_d) = d$.
Observe que $f(a_d) \in Y$ e que $f(a_d) \notin Y'$.
Logo $a_d \in f^{-1}[Y]$ e $a_d \notin f^{-1}[Y']$, pela definição da $f^{-1}[-]$.
Logo $f^{-1}[Y] \neq f^{-1}[Y]'$.

(14) **B2.** RESPOSTA "$\Leftarrow$" (SIM / NÃO / DEPENDE).

Sim! Vou provar a contrapositiva da afirmação.

Suponha então que f não é sobrejetora. Vou demonstrar que $f^{-1}[-]$ não é injetora. Basta então achar dois membros distintos no seu domínio mapeados no mesmo objeto. Como f não é sobrejetora, seja $t \in B$ tal que para todo $a \in A$, $f(a) \neq t$. Agora considere os: $\emptyset$ e $\{t\}$. Ambos são subconjuntos de B, e eles são distintos, mas mesmo assim

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset = f^{-1}[\{t\}].$$

Ou seja, a $f^{-1}[-]$ não é injetora.

(8♭) **Z**

Usando a notação λ e conjuntos não-específicos A, B, C, defina as funções *curry* e *uncurry*.
DEFINIÇÕES.

$$\begin{aligned} curry &: ((A \times B) \to C) \to (A \to B \to C) \\ curry(f) &= \lambda a.\ \lambda b.\ f(a,b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} uncurry &: (A \to B \to C) \to ((A \times B) \to C) \\ uncurry(F) &= \lambda(a,b).\ \big(F(a)\big)(b) \end{aligned}$$

(34) **C**

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função *sucessor*.

(8) **C1.** Supondo que o leitor não sabe o que são as iterações duma função e que sequer quer saber, defina (com texto completo!) a função $succ^n$ numa maneira simples.
DEFINIÇÃO.

Seja $n \in \mathbb{N}$. A $succ^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função definida pela

$$succ^n(x) = x + n$$

(18) **C2.** Prove tua afirmação, que $succ^n$ é igual à função que escreveu no **C1**.

PROVA.

Basta provar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(\forall x \in \mathbb{N})\,[\,succ^n(x) = x + n\,]$$

algo que vou provar por indução no n.

BASE ($n = 0$): Seja $x \in \mathbb{N}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} succ^0(x) &= 1_{\mathbb{N}}(x) && \text{(pela def. da } succ^0\text{)} \\ &= x && \text{(pela def. da } 1_A\text{)} \\ &= x + 0. && \text{(pelo ensino fundamental)} \end{aligned}$$

PASSO INDUTIVO: Suponha $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{N})\left[\,succ^k(x) = x + k\,\right]. \tag{HI}$$

Basta provar que

$$(\forall y \in \mathbb{N})\left[\,succ^{k+1}(y) = y + (k+1)\,\right].$$

Seja $y \in \mathbb{N}$ então. Calculamos:

$$\begin{aligned} succ^{k+1}(y) &= \left(succ \circ succ^k\right)(y) && \text{(pela def. de } succ^{k+1}\text{)} \\ &= succ\big(succ^k(y)\big) && \text{(pela def. de } succ \circ succ^k\text{)} \\ &= succ(y + k) && \text{(pela HI com } x := y\text{)} \\ &= (y + k) + 1 && \text{(pela def. de } succ\text{)} \\ &= y + (k + 1). && \text{(pelo ensino fundamental)} \end{aligned}$$

(8) **C3.** Qual é (a extensão d)o conjunto $\bigcap_{n=0}^{\infty} succ^n[\mathbb{N}]$? Prove tua afirmação.

Dica: *Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, temos que $a \leq b$ sse existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a + k = b$.*

RESPOSTA.

$\bigcap_{n=0}^{\infty} succ^n[\mathbb{N}] = \emptyset$.

Para chegar num absurdo, suponha que $w \in \bigcap_{n=0}^{\infty} succ^n[\mathbb{N}]$.
Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $w \in succ^n[\mathbb{N}]$.
Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $succ^n(m) = w$.
Mas $succ^n(m) = n + m$.
Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n + m = w$. (*)
Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq w$.
Ou seja, w é o máximo do $\mathbb{N}$; absurdo pois $\mathbb{N}$ não tem máximo!
(Equivalentemente, bote $n := w + 1$ na (*) para chegar no absurdo $w + 1 \leq w$.)

Só isso mesmo.